



LIETUVOS MATEMATIKŲ DRAUGIJOS LXV KONFERENCIJOS SANTRAUKOS

Birželio 27–28 d., Šiauliai

Vilniaus universiteto
Šiaulių akademija

Šiauliai
2024

Konferencijos programinis komitetas:

- Pirmininkas prof. dr. Artūras Štikonas (VU)
- Pirmininko pavaduotoja prof. dr. Renata Macaitienė (VU)
- prof. dr. Ramūnas Garunkštis (VU)
- asist. dr. Vaidas Giedrimas (VU)
- doc. dr. Vytautas Janilionis (KTU)
- prof. dr. Kęstutis Kubilius (VU)
- prof. dr. Olga Kurasova (VU)
- prof. dr. Antanas Laurinčikas (VU)
- doc. dr. Jurgita Markevičiūtė (VU)
- doc. dr. Bronė Narkevičienė (KTU)
- prof. dr. Rimas Norvaiša (VU)
- doc. dr. Sigita Urbonienė (VDU)
- prof. dr. Jonas Šiaulys (VU)
- prof. dr. Olga Štikonienė (VU)

Konferencijos organizacinis komitetas:

- Pirmininkė dr. Renata Macaitienė (VU ŠA)
- Pirmininkės pavaduotojas dr. Mindaugas Stoncelis (VU ŠA)
- dr. Virginija Garbaliuskienė (VU ŠA)
- dr. Karolina Kanišauskienė (VU ŠA)
- dr. Vaidotas Kanišauskas (VU ŠA)
- dr. Darius Šiaučiūnas (VU ŠA)

Bibliografinė informacija pateikiama Lietuvos integralios bibliotekų informacinės sistemos (LIBIS) portale ibiblioteka.lt

ISBN 978-609-07-1120-0 (Leidinio forma: Elektroninis – PDF)

© Vilniaus universitetas, 2024

Turinys

Plenariniai pranešimai	7
A. Dubickas , Lietuva pasaulinėse matematikos olimpiadose	8
K. Pileckas , Mathematical hydrodynamics: classical problems and modern applications	9
P. Treigys , Artificial intelligence: development, future and applications	10
Algebra, skaičių teorija ir geometrija	11
R. Alonderis , Multisukcedentinis sekvencinis skaičiavimas intuicio- nistinei episteminei logikai	12
I. Belovas , Apie sritį, kurioje pirminių skaičių dzeta funkcija nėra lygi nuliui	13
R. Čepaitytė, I. Belovas, M. Sabaliauskas , Apie pirminių skaičių dzeta funkcijos nulių pasiskirstymą	14
V. Garbaliauskienė, A. Garbaliauskas , Aproximavimas Rymano dzeta funkcijos Melino transformacijos diskrečiaisiais postūmiais	15
R. Garunkštis , Apie Riemann'o dzeta funkcijos nilius	16
A. Geštautas , Apie Beurlingo dzeta funkcijų universalumą	17
A. Grigutis , On a positivity property of the real part of the logari- thmic derivative of the Riemann ξ -function	18
B. Gutauskienė, R. Macaitienė , Diskrečioji ribinė teorema Epš- teino dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje	19
M. Jاسas , Analizinių funkcijų porų klasės aproksimavimas tam tikrų Dirichlė eilučių postūmiais	20
G. Junevičius , On complex Pisot numbers which are roots of Borwein trinomials	21
R. Kačinskaitė , Apie vienalaikį analizinių funkcijų aproksimavimą dzeta funkcijų klase	22
R. Macaitienė , Apibendrinta ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai	23
L. Maciulevičius, A. Dubickas , Apie trejetą (4, 6, 8)	24
E. Manstavičius , Atsitiktinio keitinio dalikliai	25
J. M. Menjanahary, E. Hoxhaj, R. Krasauskas , Sections of Du- pin cyclides and singularities of Dupin cyclidic systems	26
T. Mikalaukaitė , Analizinių funkcijų aproksimavimas apibendrini- taisiais Lercho dzeta funkcijos postūmiais	27
K. Ragauskas, A. Birštunas , Grouping based calculus for proposi- tional linear temporal logic	28

A. Rimkevičienė, A. Balčiūnas , Diskrečioji Mišu teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlé eilutėms, susijusioms su periodinėmis dzeta funkcijomis	29
M. Stoncelis , Apie Hurvico tipo dzeta funkcijų universalumą	30
D. Šiaučiūnas , Parabolinių formų dzeta funkcijų universalumas trumpuose intervaluose	31
R. Šimėnas , Išplėstinė Selbergo klasė ir pirminės funkcijos	32
M. Tekorė , Gramo taškai periodinės dzeta funkcijos universalume	33
B. Togobickij, R. Kačinskaitė , Selbergo-Štoidingo klasės diskretus jungtinis universalumas ir netrivialūs Rymano dzeta funkcijos nuliai	34
Diferencialinės lygtys ir skaičiavimo metodai	35
K. Bingelė, A. Štikonas , Diskrečiojo Šturmo–Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliąja sąlyga tyrimas	36
S. M. Everatt, K. Kaulakytė , Kairiojo prieširdžio apendikso klasifikavimo sistemų palyginimas	37
R. Juodagalvytė, K. Kaulakytė, K. Pileckas , Regularity results for very weak time-periodic Poiseuille-type solution with minimally regular flow rate	38
K. Kaulakytė, N. Kozulinas, K. Pileckas , Time periodic inverse problem with nonlocal condition	39
N. Kozulinas, K. Kaulakytė, G. Panasenko, K. Pileckas, V. Šumskas , Poiseuille-type approximations for axisymmetric flow in a thin tube with thin stiff elastic wall	40
K. Pupalaiigė, M. Sapagovas , Netiesinės parabolinės lygties su integraline nelokaliąja sąlyga skirtuminės schemos konvergavimas	41
V. Šumskas, R. Astrauskas, F. Ivanauskas, A. Kareiva, A. Pakalniškis , YAG sintezės matematinis modeliavimas	42
Matematikos istorija ir didaktika	43
I. Belovas , Iš VU Matematikos ir informatikos fakulteto istorijos: studentų priėmimo į matematikos specialybes raida XX a. antroje pusėje	44
M. Grigaliūnienė, J. Van Hoof , Ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogų įsitikinimai apie matematiką ir jos mokymą(si)	45
K. Kanišauskienė , Matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų palyginimas	46
I. Kilienė , Aritmetinių tekstinių uždavinių analizė pradinių klasių vadovėliuose	47
R. J. Kudžma , Trupmenų anatomija	48
J. J. Mačys , Trumpesnis pagrindinės algebros teoremos įrodymas	49
E. Mazėtis, G. Melničenko , Būtiniosios ir pakankamosios sąlygos teoremose	50
V. Miežys , Transformacijos ir simetrija mokyklinėje matematikoje	51
R. Norvaiša , Geometrinės transformacijos mokyklinėje matematikoje	52
R. Norvaiša , Matematikos mokytojų rengimo Lietuvoje galimybės ir sunkumai	53

Matematikos taikymai	54
R. Astrauskas, A. Kanonovičius, M. Radavičius, F. Ivanauskas, Rinkėjo modelis su periodinių apklausų mechanizmu	55
M. Bloznelis, D. Marma, Reto ir klasterizuoto tinklo Markovo grandinė	56
V. Kleiza, J. Tilindis, Mokymosi kreivių teorija ir taikymai	57
R. Leonaitė, M. Landauskas, Likusios naudingos darbo trukmės vertinimas naudojant daugiamačių duomenų vizualizavimo metodus	58
U. Orinaitė, I. Telksnienė, T. Telksnys, M. Ragulskis, Kaip trupmeninės eilės išvestinė keičia Chirikov standartinio modelio kompleksiskumą?	59
L. Saunorienė, M. Ragulskis, Wada indeksas ir jo taikymas steganografijoje	60
R. Simanavičienė, A. Kasparavičiūtė, D. Kalibatienė, Daugiakriterinių sprendimo priėmimo metodų tyrimas, atsižvelgiant į rodiklių normalizavimą neraiškiųjų skaičių atveju	61
M. Songailaitė, J. Mandravickaitė, T. Krilavičius, Žinių grafų bei grafų branduolių panaudojimas dezinformacijos aptikimui	63
T. Telksnys, Caputo trupmeninio logistinio žemėlapių laikino stabilizavimo schema	64
Statistika ir jos taikymai	65
K. Dučinskas, M. Karaliūtė, Supervised classification of area-temporal data via HMMs with continuous non-gaussian observations	66
M. Gervytė, T. Žvirblis, Functional data analysis of near-infrared spectroscopy (NIRS) signals in small data samples	67
A. Jakaitienė, L. Ringienė, R. Dukynaitė, R. Želvys, ES ir EEE šalių tarptautinio skaitymo gebėjimų tyrimo PIRLS mokinių pasiekimų atotrūkio įvertinimas ir analizė 2001–2021	68
G. Klimantavičiūtė, J. Markevičiūtė, Adityvių funkcijų lyginamoji analizė sezoninių laiko eilučių dekompozijai	69
J. Levickytė, R. Levulienė, Homogeniškumo testų priklausomoms cenzūruotoms imtims lyginamoji analizė	70
V. Nekrašaitė-Liegė, Populiacijos parametrų vertinimas iš netikimybinės imties įtraukiant papildomą informaciją iš tikimybinės imties	71
R. Paukštaitienė, V. Špečkauskienė, Skirtingų mašininio mokymosi metodų taikymas klasifikavimui	72
M. Radavičius, Universalios ir asimptotiškai tikslios nelygės binominio atsitiktinio dydžio nuokrypių tikimybėms	74
D. Šlevinskas, A. Čiginas, I. Burakauskaitė, Laisvų darbo vietų vertinimas mažose populiacijos srityse naudojant iš interneto nuskaitytus duomenis	75
K. Švambarytė I. Burakauskaitė, R. Levulienė, Redagavimo metodų lyginamoji analizė	76
A. Vitkauskaitė, A. Čiginas, Vartotojų pasitikėjimo rodiklio prognozavimas naudojant X, Google Trends ir administracinius duomenis	77

Stochastiniai metodai ir modeliai	78
M. Bražėnas, E. Valakevičius , Dalinių tolydaus laiko Markovo grandinių konstravimo algoritmų empirinis tyrimas	79
M. Dirma, R. Leipus, J. Šiaulys, R. Zovė , Normaliųjų atsitiktinių dydžių sandaugų skirstinio uodegos asimptotinis elgesys	80
S. Jokubauskienė, V. Čekanavičius , Netolygus įvertis Hipp'o teoremoje dvimačiu atveju	81
V. Kanišauskas, K. Kanišauskienė , Tolydaus laiko diskrečiųjų martingalų statistinių modelių asimptotinis įvertinimas	82
G. Liaudanskaitė, V. Čekanavičius , Skellamo aproksimacija markoviškai priklausomiems dydžiams	83
M. Manstavičius , Konkordacijos matų konstrukcija naudojant generatorius	84
D. Norgilas, E. Bayraktar, S. Deng , Supermartingale Brenier's theorem with full-marginals constraint	85
J. Šiaulys, R. Leipus , Sunkiauodegių skirstinių uždarumas	86
M. Šileikis, F. Garbe, J. Hladký, F. Skerman , Tankių grafų atsitiktiniai procesai	87
Teorinė informatika	88
A. Michalkovič , Apie STR raktų apsikeitimo protokolo saugumą	89
J. Ramonaitė, G. Korvel , Wave-U-Net modelio pritaikymas šnekos signalo gerinimui triukšmingoje aplinkoje: blokų skaičiaus optimizavimo tyrimas ir jų įtaka šnekos signalo kokybei bei suprantamumui	90
S. Rimašauskas, I. Belovas, R. Gričius , Turinio atpažinimas su skaitmenintuose finansiniuose dokumentuose	91
R. Vidunas, A. Vaicekuskas , Conway žaidimo „Gyvenimas“ perturbavimas	92
J. Žitkevičius, A. Michalkovič , Raktų apsikeitimo protokolo, paramto matricinio laipsnio funkcija, statistinė analizė	93
Rodyklė	94

Plenariniai pranešimai

Lietuva pasaulinėse matematikos olimpiadose

Artūras Dubickas

Vilniaus universitetas

Pasaulinės matematikos olimpiados vyksta nuo 1959 metų. Per visą laiką įvyko jau 64 tokios olimpiados, o Lietuva jose dalyvauja nuo 1992 metų. Praešime apžvelgsime olimpiados plėtrą nuo 7 iki daugiau kaip 110 valstybių ir teritorijų bei pasvarstysime, kodėl būtent ši olimpiada tapo didžiausia ir turbūt labiausiai prestižinė iš visų mokslo olimpiadų. Lietuvą joje atstovavo jau 111 mokinių, o kai kurie iš jų pasiekė gana gerų rezultatų. Apžvelgsime, kaip klostėsi jų karjera po universiteto, kiek iš jų apsigynė daktaro disertacijas, kiek pasirinko akademinį darbą universitetuose ir t.t.

Mathematical Hydrodynamics: Classical Problems and Modern Applications

Konstantinas Pileckas

Vilnius University

At the beginning of the 20th century, the British chemist and Nobel laureate Sir Cyril Norman Hinshelwood (1897-1967) wrote: "Fluid dynamics professionals are divided into hydraulic engineers who observe things that cannot be explained and mathematicians who explain things that cannot be observed".

In the talk I will explain certain mathematical problems formulated at the beginning of 20th century, known as Leray's problems, that have remained unsolved or partially unresolved to this day. Additionally, I will explore some practical applications of hydrodynamics in cardio medicine that can nowadays be addressed through numerical methods and computer simulations.

Artificial Intelligence: Development, Future and Applications

Povilas Treigys

Vilnius University

In the rapidly changing landscape of Artificial Intelligence (AI) and its related fields such as Machine Learning (ML), Robotic Process Automation (RPA), High-Performance Computing (HPC), and Quantum High-Performance Computing (QHPC), there is a consensus among experts, including those from Price Waterhouse Coopers (PwC), that these technologies hold the unprecedented potential to transform the very essence of human society, including aspects of work and income generation. This brief presentation aims to shed light on the complex and multifaceted effects of AI development, particularly focusing on how these advancements are setting new benchmarks for digitization and ushering in an era of enhanced efficiency and innovation. As we dive deeper into the transformative power of AI, special attention is given to the role of generative models, with a spotlight on tools like ChatGPT. These models are not just technological marvels but are redefining what is possible in various sectors, including but not limited to healthcare, finance, education, and customer service. The implications of these tools are vast, offering new ways to engage with information, automate tasks, and personalize services at an unprecedented scale. Moreover, this presentation aims to serve as a comprehensive guide, offering valuable resources and insights to help stakeholders, whether they are policymakers, business leaders, or technologists, navigate the intricate process of AI integration. From identifying key trends and challenges to highlighting potential opportunities, the goal is to equip attendees with the knowledge they need to make informed decisions about incorporating AI technologies into their strategies and operations. Ultimately, this presentation is designed to provide a forward-looking perspective on the role of AI in catalyzing positive change. By synthesizing current trends with the challenges and opportunities that lie ahead, we hope to inspire a vision of a future where AI leads to equitable, sustainable, and beneficial advancements for society at large. The journey of AI integration is complex and filled with uncertainties, but by fostering an understanding of these technologies and their potential impacts, we can navigate this terrain more effectively, ensuring that the benefits of AI are realized by all.

Algebra, skaičių teorija ir geometrija

Multisukcedentinis sekvencinis skaičiavimas intuicionistinei episteminei logikai

Romas Alonderis

Vilniaus universitetas

Sukonstruotas multisukcedentinis sekvencinis skaičiavimas intuicionistinei episteminei logikai. Įrodytas struktūrinių ir pjūvio taisyklių leistinumumas šiame skaičiavime. Taip pat įrodytas šio skaičiavimo bei tradicinio intuicionistinio skaičiavimo ekvivalentumas intuicionistinių sekvencijų atžvilgiu.

Literatūra

- [1] Alonderis, R. 2000. Proof-theoretical investigation of temporal logic with time gaps. *Lith. Math. J.* 40(3): 255–276.
- [2] Alonderis, R., Sakalauskaitė, J. 2018. A Labelled sequent calculus for half-order modal logic. *IfCoLog Journal of Logics and their Applications* 5(1):121–163.
- [3] Amati, G., Pirri, F. 1994. A Uniform tableau method for intuitionistic modal logics I. *Studia Logica* 53(1):29–60.
- [4] Artemov, S., Protopopescu, T. 2016. Intuitionistic epistemic logic. *The Review of Symbolic Logic* 9:266–298.
- [5] Balbiani, P., Boudou, J. 2019. Intuitionistic linear temporal logics, *ACM Transactions on Computational Logic* 21(2):1–32.
- [6] Krupski, V. N., Yatmanov, A. 2016. Sequent calculus for intuitionistic epistemic logic IEL. In: *International Symposium on Logical Foundations of Computer Science*, Springer. pp. 187–201.
- [7] Lin, Z., Ma, M. 2019. Gentzen sequent calculi for some intuitionistic modal logics. *Logic Journal of the IGPL*, 27(4):596–623.
- [8] Troelstra, A. S., Schwichtenberg, H. 2000. *Basic Proof Theory*, 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press.

Apie sritį, kurioje pirminių skaičių dzeta funkcija nėra lygi nuliui

Igoris Belovas

Vilniaus universitetas

Pirminių skaičių dzeta funkcija yra viena iš mažiau ištirtų savo klasės atstovų, pasižyminčių nereguliariu, „chaotišku“ nulių išsidėstymu, tiek kritinėje juostoje, tiek už jos ribų. Įrodoma, kad pirminių skaičių dzeta funkcija $\zeta_{\mathbb{P}}(s)$ nėra lygi nuliui pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$, čia $\sigma_0 = 1.77954465354699\dots$ yra funkcijos $U(\sigma) = 21 - \sigma - \zeta_{\mathbb{P}}(\sigma)$ šaknis. Šis rezultatas negali būti pagerintas daugiau kaip $\Delta = 0.097$, nes, kai $|t| < 200000$, $\max\{\sigma : \zeta_{\mathbb{P}}(s) = 0\} = 1.682628788045196\dots$

Apie pirminių skaičių dzeta funkcijos nulių pasiskirstymą

Rugilė Čepaitytė, Igoris Belovas, Martynas Sabaliauskas

Vilniaus universitetas

Pirminių skaičių dzeta funkcija yra viena mažiausiai šios šeimos ištirtų funkcijų. Ypač mažai yra žinoma apie jos nulių pasiskirstymą. Tyrimo tikslas yra praplėsti mūsų šios temos supratimą ir bent iš dalies atskleisti nulių išsidėstymo prigimtį. Pirminių skaičių dzeta funkcijos reikšmėms srityje $0,1 < \sigma < 1,77954\dots$ ir $0 < t < 104$ apskaičiuoti buvo realizuoti ir palyginti tarpusavyje dvylika skirtingų algoritmų ir algoritmų modifikacijų. Nulių paieškai buvo naudojami lygiagretieji skaičiavimai ir globalaus optimizavimo metodai. Nulių pasiskirstymo empiriniam tyrimui buvo panaudoti Kolmogorovo, Andersono-Darlingo, Kuiperio, Watsono bei Kramerio-Mizeso suderinamumo kriterijai.

Aproksimavimas Rymano dzeta funkcijos Melino transformacijos diskrečiaisiais postūmiais

Virginija Garbaliuskienė^{†,‡}, Antanas Garbaliuskas[‡]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Šiaulių valstybinė kolegija

Tegul $\mathcal{Z}(s)$, $s = \sigma + it$, yra Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ kvadrato Melino transformacija, apibrėžiama integralu

$$\mathcal{Z}(s) = \int_1^\infty \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + ix\right) \right|^2 x^{-s} dx.$$

Nagrinėsime analizinių funkcijų aproksimavimą diskrečiaisiais postūmiais $\mathcal{Z}(s + ikh)$, čia $h > 0$, o $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, o $H(D)$ – analizinių juostoje D funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

Pranešime bus pristatyta teorema.

Teorema. [1]. *Egzistuoja netuščia uždara aibė F_h , $h > 0$, kad su kiekvienu $K \subset D$, $f(s) \in F_h$ ir $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{Z}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Be to, riba

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\mathcal{Z}(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\}$$

egzistuoja ir yra teigiama su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Garbaliuskienė, V., Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2023. On the discrete approximation by Mellin transform of the Riemann zeta-function. *Mathematics* 11(10):2315.

Apie Riemann'o dzeta funkcijos nilius*

Ramūnas Garunkštis

Vilniaus universitetas

Pranešime nagrinėjame diskrečiuosius Riemann'o dzeta funkcijos vidurkius pagal pastumtus šios funkcijos nilius. Pirmasis tokius tyrimus pradėjo S. M. Gonek'as, kai postūmiai yra grynai menamieji skaičiai. Mes įrodome naujus rezultatus, kai postūmiai yra bendri kompleksiniai skaičiai.

*Tyrimus finansavo Lietuvos mokslo taryba. Grantu numeris S-MIP-22-81

Apie Beurlingo dzeta funkcijų universalumą

Andrius Geštautas

Vilniaus universitetas

Realųjų skaičių $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq \dots$ sistema \mathcal{P} su $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$ yra vadinama apibendrintais pirminiais skaičiais. Sistema \mathcal{P} generuoja apibendrintų sveikųjų skaičių sistemą $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, su tam tikru $r \in \mathbb{N}$ yra išreiškiamą baigtine sandauga $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \dots, r$.

Beurlingo dzeta funkcijos $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilute arba Oilerio sandauga pagal apibendrintus pirminius skaičius

$$\zeta_{\mathcal{P}}(s) = \sum_{m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} m^{-s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

čia σ_0 priklauso nuo sistemos \mathcal{P} . Beurlingo dzeta funkcijų analizinis pratęsimas yra sudėtingas. Tegul $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x)$ žymi apibendrintų sveikųjų skaičių, mažesnių už x , skaičių. Jeigu

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(x) = ax + O(x^{\beta}), \quad a > 0, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad (1)$$

tuomet yra žinoma, kad funkcija $\zeta_{\mathcal{P}}(s)$ yra meromorfiškai pratęsiama į pusplokštumą $\sigma > \beta$, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis poliūs su reziduumu a .

Apibrėžkime apibendintą von Mangoldtto funkciją

$$\Lambda_{\mathcal{P}}(m) = \begin{cases} \log p, & \text{jeigu } m = p^k, p \in \mathcal{P}, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Tegul $\psi_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{m \leq x, m \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \Lambda_{\mathcal{P}}(m)$. Su $\beta_1 < 1$ funkcijai $\psi_{\mathcal{P}}(x)$ galioja asimptotika

$$\psi_{\mathcal{P}}(x) = x + O(x^{\beta_1}). \quad (2)$$

Apibrėžkime aibę $L(\mathcal{P}) = \{\log p : p \in \mathcal{P}\}$. Tegul $D = D_{\mathcal{P}} = \{s \in \mathbb{C} : \hat{\sigma} < \sigma < 1\}$, čia $\hat{\sigma} < 1$ tam tikras efektyviai suskaičiuojamas realusis skaičius, \mathcal{K} yra juostos D kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais klasė, $H_0(K)$, kai $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų, neįgyjančių nulių aibėje K ir analizinių aibės K viduje, klasė, o $\text{meas} A$ – mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas.

Teorema. [1]. *Tarkime, kad su sistema \mathcal{P} galioja (1) ir (2) asimptotikos, o aibė $L(\mathcal{P})$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno \mathbb{Q} . Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta_{\mathcal{P}}(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, „ \liminf “ gali būti pakeistas „ \lim “ su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Geštautas, A., Laurinčikas, A. 2024. On universality of some Beurling zeta-functions. *Axioms* 13(3):145.

On a Positivity Property of the Real part of the Logarithmic Derivative of the Riemann ξ -Function

Andrius Grigutis

Vilnius University

The presentation will be about the positivity of the real part of the logarithmic derivative of the Riemann ξ -function when $1/2 < \sigma < 1$ and t is sufficiently large. There will be provided explicit upper and lower bounds of $\Re \sum_{\rho} 1/(s-\rho)$, where the summation runs over the zeros of $\zeta(s)$ on the line $1/2 + it$. Also, the positivity of $\Re \xi'/\xi(s)$ in the strip $1/2 < \sigma < 1$ will be examined assuming that there occur non-trivial zeros of $\zeta(s)$ off the critical line.

References

- [1] Broughan, K. 2009. Extension of the Riemann ξ -function's logarithmic derivative positivity region to near the critical strip. *Can. Math. Bull.* 52(2):186–194.
- [2] Garunkštis, R. 2002. On a positivity property of the Riemann ξ -function. *Lith. Math. J.* 42:140–145.
- [3] Matiyasevich, Yu., Saidak, F., Zvengrowski, P. 2014. Horizontal monotonicity of the modulus of the zeta function, L -functions, and related functions. *Acta Arith.* 166(2):189–200.
- [4] Platt, D. J., Trudgian, T. S. 2015. An improved explicit bound on $|\zeta(1/2 + it)|$. *J. Number Th.* 147:842–851.
- [5] Sondow, J., Dumitrescu, C. 2010. A monotonicity property of Riemann's xi function and a reformulation of the Riemann hypothesis. *Period. Math. Hungar.* 60:37–40.
- [6] Trudgian, T. S. 2014. An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line II. *J. Number Th.* 134:280–292.

Diskrečioji ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje[†]

Birutė Gutauskienė, Renata Macaitienė

Vilniaus universitetas

P. Epšteinas savo darbuose siekė rasti kaip galima bendresnę dzeta funkciją, turinčią Rymano tipo funkcinę lygtį. Straipsnyje [1] apibrėžta eilutė pavadinta jo vardu. Tegul Q yra teigiamai apibrėžta $n \times n$ matrica ir $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$, $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$. Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, pusplokštumėje $\sigma > \frac{n}{2}$, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Q[\underline{x}])^{-s}$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su reziduumu $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det Q}}$. Išsamią apžvalgą apie šią funkciją galima rasti, pavyzdžiui, [3].

Žinoma, kad dzeta funkcijų asimptotinės savybės geriausiai nusakomos tikimybinėmis ribinėmis teoremomis silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme. Tolydaus tipo ribinę teoremą funkcijai $\zeta(s; Q)$ kompleksinėje plokštumoje pateikė A. Laurinčikas ir R. Macaitienė [2]. Pranešime pristatysime diskretaus tipo rezultata.

Literatūra

- [1] Epstein, P. 1903. Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen. *Math. Ann.* 56:615–644.
- [2] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2018. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Results in Math.*, 73(4):147–163.
- [3] Nakamura, T., Pańkowski, Ł. 2013. On zeros and c -values of Epstein zeta-functions. *Šiauliai Math. Semin.* 8(16):181–195.

[†]Antrosios autorės tyrimus finansavo Lietuvos mokslo taryba. Grantu numeris: S-MIP-22-81.

Analizinių funkcijų porų klasės aproksimavimas tam tikrų Dirichlė eilučių postūmiais

Mindaugas Jasas

Vilniaus universitetas

Pranešime aptarsime absoliučiai konverguojančių Dirichlė eilučių, susijusių su periodine dzeta funkcija ir periodine Hurvico dzeta funkcija, jungtinio universalumo savybę. Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ ir $\mathbf{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra dvi periodinės kompleksinių skaičių sekos atitinkamai su periodais $q_1 \in \mathbb{N}$ ir $q_2 \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas skaičius ir $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathbf{a})$ ir periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{b})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \quad \text{bei} \quad \zeta(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m + \alpha)^s}$$

ir yra meramorfiškai pratęsimos į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis poliuis.

Tarkime, jog $\theta > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius, $u > 0$, $v_u(m) = \exp\{-(m/u)^\theta\}$, $m \in \mathbb{N}$, bei $v_u(m, \alpha) = \exp\{-((m + \alpha)/u)^\theta\}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Apibrėžkime eilutes

$$\zeta_u(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_u(m)}{m^s} \quad \text{bei} \quad \zeta_u(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m v_u(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s}.$$

Kadangi $v_u(m)$ ir $v_u(m, \alpha)$ mažėja eksponentiškai m atžvilgiu, eilutės, apibrėžiančios $\zeta_u(s; \mathbf{a})$ ir $\zeta_u(s, \alpha; \mathbf{b})$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma_0 > \sigma$ su bet kuriuo baigtiniu σ_0 ir kiekvienu $u > 0$.

Pranešimo metu detaliam išanalizuosime analizinių funkcijų porų klasės aproksimavimą tolydziaisiais postūmiais

$$(\zeta_{u_T}(s + iT; \mathbf{a}), \zeta_{u_T}(s + iT, \alpha; \mathbf{b})), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

su multiplikatyviaja seka \mathbf{a} (žr. [1]) bei analizinių funkcijų porų klasės aproksimavimą diskrečiais postūmiais

$$(\zeta_{u_T}(s + ikh_1; \mathbf{a}), \zeta_{u_T}(s + ikh_2, \alpha; \mathbf{b})), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

su multiplikatyviaja seka \mathbf{a} ir $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ (žr. [2]).

Literatūra

- [1] Balčiūnas, A., Jasas, M., Macaitienė, R., Šiaučiūnas, D. 2023. On the Mishou theorem for zeta-functions with periodic coefficients. *Mathematics* 11:2042.
- [2] Balčiūnas, A., Jasas, M., Rimkevičienė, A. 2024. A discrete version of the Mishou theorem related to periodic zeta-functions. *Math. Modell. Analysis* 29: 331–346.

On Complex Pisot Numbers Which are Roots of Borwein Trinomials

Grintas Junevičius

Vilnius University

Let $n > m$ be positive integers. Polynomials of the form $zn \pm zm \pm 1$ are called Borwein trinomials. Using an old result of Bohl, we derive explicit formulas for the number of roots of a Borwein trinomial inside the unit circle $|z| < 1$. Based on this, we determine all Borwein trinomials that have a complex Pisot number as a root. There are exactly 29 such trinomials.

References

- [1] Drungilas, P., Jankauskas, J., Junevičius, G. 2024 On Complex Pisot Numbers That Are Roots of Borwein Trinomials. *Mathematics* 12:1129.

Apie vienalaikį analizinių funkcijų aprosimavimą dzeta funkcijų klase

Roma Kačinskaitė

Vilniaus universitetas
Vytauto Didžiojo universitetas

2023 m. R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas ir B. Žemaitienė įrodė [1], kad juostoje $\{s \in \mathbb{C} : \sigma_L < \sigma < 1\}$ analizinių funkcijų rinkinys $(f_1(s), \dots, f_r(s))$ gali būti aproksimuojamas L funkcijų, priklausančių Selbergo-Štoidingo klasei, rinkinio $(L(s + ia_1\tau), \dots, L(s + ia_r\tau))$ postūmiais ($\sigma_L > \frac{1}{2}$ priklauso nuo L funkcijos). Pranešime pristatysime du rezultatus, susijusius su šiuo vienalaikiu aproksimavimu, – minėto rinkinio jungtinį funkcinį nepriklausomumą bei tirštumą.

Literatūra

- [1] Kačinskaitė, R., Laurinčikas, A., Žemaitienė, B. 2023. Joint universality in the Selberg-Steuding class. *Mathematics* 11:737.

Apibendrinta ribinė teorema Epšteino dzeta funkcijai

Renata Macaitienė

Vilniaus universitetas
Šiaulių valstybinė kolegija

Pranešime apžvelgsime tam tikrus Epšteino dzeta funkcijos reikšmių pasiskirstymo aspektus ir gautus tolydaus bei diskretaus tipo rezultatus (žr. [1], [2], [3] ir [4]).

Tegul Q yra teigiamai apibrėžta $n \times n$ matrica, $Q[\underline{x}] = \underline{x}^T Q \underline{x}$ visiems $\underline{x} \in \mathbb{Z}^n$. Epšteino dzeta funkcija $\zeta(s; Q)$, $s \in \mathbb{C}$, apibrėžiama eilute

$$\zeta(s; Q) = \sum_{\underline{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Q[\underline{x}])^{-s}, \quad \sigma > \frac{n}{2},$$

ir yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = \frac{n}{2}$ su $\text{Res}_{s=\frac{n}{2}} \zeta(s; Q) = \pi^{\frac{n}{2}} (\Gamma(\frac{n}{2}) \sqrt{\det Q})^{-1}$. Epšteino dzeta funkcija tenkina funkcinę Rymano tipo lygtį

$$\pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(s; Q) = \sqrt{\det Q} \pi^{s-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - s\right) \zeta\left(\frac{n}{2} - s; Q^{-1}\right).$$

Išsamiau aptarsime apibendrintą Boro-Jeseno tipo ribinę teoremą silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme funkcijai $\zeta(s; Q)$ [4]. Tegul $n \geq 4$ yra lyginis skaičius, $Q[\underline{x}] \in \mathbb{Z}$ ir $\varphi(t)$ yra diferencijuojama, turinti monotonišią išvestinę, funkcija. Tuomet erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja išreikštinį pavidalą turintis ribinis matas $P_{Q, \sigma}$, kad pusplokštumėje $\sigma > \frac{n-1}{2}$,

$$\frac{1}{T} \text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + i\varphi(t); Q) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \rightarrow \infty$, sipnai konverguoja į $P_{Q, \sigma}$. Čia $\text{meas}A$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, o $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ – erdvės \mathbb{C} Borelio aibių klasė.

Bus pateikti funkcijos $\varphi(t)$ pavyzdžiai.

Literatūra

- [1] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2018. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Results in Math.* 73(4):147–163.
- [2] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2020. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. II. *Results in Math.* 75(1):24–30.
- [3] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2021. A Bohr-Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. III. *Results in Math.* 76(1):105–116.
- [4] Laurinčikas, A., Macaitienė, R. 2022. A generalized Bohr–Jessen type theorem for the Epstein zeta-function. *Mathematics* 10(12):2042.

Apie trejetą $(4, 6, 8)$

Lukas Maciulevičius, Artūras Dubickas

Vilniaus universitetas

Natūraliųjų skaičių trejetas (a, b, c) vadinamas P-trejetu, jei egzistuoja tokie algebriniai skaičiai α ir β , kurių laipsniai (virš \mathbb{Q}) atitinkamai lygūs a ir b , o sandaugos $\alpha\beta$ laipsnis lygus c . Straipsniuose [2] ir [3] nustatyti visi P-trejetai (a, b, c) , tenkinantys sąlygas $a \leq b \leq c$ ir $b \leq 7$, išskyrus vieną - neištirtas trejetas $(4, 6, 8)$. Straipsnyje [1] parodėme, jog tai nėra P-trejetas. Pranešime pristatysim šį rezultatą, apžvelgsim įrodymą ir tam tikrą apibendrinimą.

Literatūra

- [1] Dubickas, A., Maciulevičius, L. 2024. The product of a quartic and a sextic number cannot be octic. *Open Mathematics* 22:20230184.
- [2] Maciulevičius, L. 2023. On the degree of product of two algebraic numbers. *Mathematics* 11(9):2131.
- [3] Virbalas, P. 2023. Degree of the product of two algebraic numbers one of which is of prime degree. *Mathematics* 11(6):1485.

Atsitiktinio keitinio dalikliai

Eugenijus Manstavičius

Vilniaus universitetas

Kiekvieną simetrinės grupės \mathbb{S}_n , $n \geq 1$, keitinį $\sigma : [n] \rightarrow [n] := \{1, \dots, n\}$ galima vaizduoti orientuotu žymėtuoju grafu, sudarytu iš ciklų $\{c_1, \dots, c_{w(\sigma)}\}$, kurių viršūnių numerių aibės nesikerta. Poaibius $\delta = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_j}\}$, $1 \leq i_r \leq w(\sigma)$, įskaitydami ir tuščiąjį, vadinsime σ *dalikliais* ir žymėsime $\delta|\sigma$. Viršūnių skaičius daliklyje $|\delta| := |c_{i_1}| + \dots + |c_{i_j}|$ yra jo dydis. Tegul $\vartheta > 0$ yra konstanta, o t , $0 \leq t \leq 1$, - kintamas parametras. Apibrėžkime santykį

$$X_n(t) := X_n(\sigma; t) = \left(\sum_{\delta|\sigma} \vartheta^{w(\delta)} \right)^{-1} \sum_{\substack{\delta|\sigma \\ |\delta| \leq tn}} \vartheta^{w(\delta)}.$$

Čia sumuojama pagal keitinio daliklius, kurių yra iš viso $2^{w(\sigma)}$. Tolygusis tikimybinis matas \mathbb{S}_n apibrėžiamas vienodomis tikimybėmis $\nu_n(\{\sigma\}) = 1/n!$, čia $\sigma \in \mathbb{S}_n$. Jo atžvilgiu $X_n(t)$ yra stochastinis procesas, kurio trajektorijos priklauso Skorochodo erdvei $\mathbb{D} := \mathbb{D}[0, 1]$. Tegul \mathcal{D} yra jos poaibių Borelio sigma algebra. Mes nagrinėjame skirstinių $\nu_N \cdot X_n^{-1}$ asimptotinę elgseną, kai $n \rightarrow \infty$.

Teorema. *Erdvėje $(\mathbb{D}, \mathcal{D})$ egzistuoja toks tikimybinis matas P , kad skirstiniai $\nu_N \cdot X_n^{-1}$ silpnai konverguoja į P . Be to, su bet kokių $p > 0$ momentai*

$$\mathbf{E}_n X_n(t)^p := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} X_n(\sigma; t)^p$$

konverguoja į atitinkamus ribinio proceso momentus tolygiai $0 \leq t \leq 1$ atžvilgiu.

Tokie ribiniai procesai aptinkami tikimybinės skaičių teorijos darbuose pradedant pirmuoju [1], todėl galima pasinaudoti jau išvestomis gana sudėtingomis momentų išraiškomis. Verta paminėti tikslesnę asimptotinę formulę, išplaukiančią iš G. Bareikio ir autoriaus rezultatų [2].

Teorema. [2]. *Tegul $\vartheta > 0$, $a := \vartheta/(1 + \vartheta)$ ir $b := 1/(1 + \vartheta)$. Tada tolygiai $0 \leq t \leq 1$ atžvilgiu*

$$\mathbf{E}_n X_n(t) = \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^t x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx + O(n^{-a} + n^{-b}),$$

čia Γ žymi Eulerio gamma funkciją.

Literatūra

- [1] Bareikis, G., Manstavičius, E., 2024. Construction of the beta distributions using the random permutation divisors. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control* 29(2):189–204.
- [2] Manstavičius, E., Timofeev, N. M., 1997. Functional limit theorem related to natural divisors. *Acta Math. Sci. Hungaricae* 75:1–13.

Sections of Dupin Cyclides and Singularities of Dupin Cyclidic Systems [‡]

Jean Michel Menjanahary[†], Eriola Hoxhaj[‡], Rimvydas Krasauskas[†]

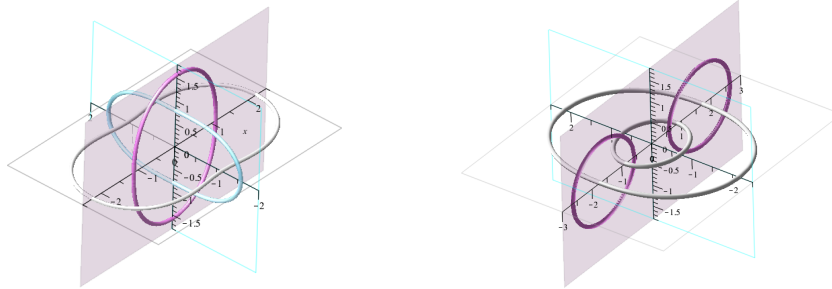
[†] Vilnius University

[‡] Johannes Kepler University, Linz (Austria)

A triply orthogonal coordinate system in \mathbb{R}^3 is called Dupin cyclidic (DC) if its coordinate lines are circles or straight lines. For various potential applications of a volume cut out of a DC system, it is important to avoid singularities. This was the main motivation for the current research. Technically, a DC system is represented by a 3-linear rational quaternionic map $F : (\mathbb{R}P^1)^3 \rightarrow \text{Im}\mathbb{H}$, $F = ND^{-1}$, $N, D \in \mathbb{H}[s, t, u]$. The singular locus $\text{sing}(F) \subset \mathbb{R}^3$ of F is defined as the image of all points where its Jacobian vanishes. It is natural to consider DC systems up to Möbius, i.e. conformal, equivalency in \mathbb{R}^3 .

In the recent work [2], DC systems are studied and classified up to Möbius equivalency into 4 big classes: (S), (O), (A) and (B). The class (S) contains well-known classical triply orthogonal coordinate systems, e.g., Cartesian, cylindrical, conical etc. The class (O) consists of DC systems obtained by offsetting a Dupin cyclide. The most general classes (A) and (B) are distinguished by their singular sets, which are nontrivial arrangements of 1-oval and 2-oval focal bicircular quartic curves on mutually orthogonal planes, see figures below.

An interesting observation is that all Dupin cyclides with the given planar or spherical section can be described as union of one parameter families of coordinate surfaces of certain DC systems, as proved in [1].



References

- [1] Hoxhaj, E., Menjanahary, J. M., Krasauskas, R. 2024. Sections of Dupin cyclides and their focal properties. *Preprint at SSRN* 4807452.
- [2] Menjanahary, J. M., Hoxhaj, E., Krasauskas, R. 2024. Classification of Dupin cyclidic Cubes by their singularities. *arXiv:2405.07225*.

[‡]This work is part of a project that has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie grant agreement No 860843.

Analizinių funkcijų aproksimavimas apibendrintaisiais Lercho dzeta funkcijos postūmiais

Toma Mikalauskaitė

Vilniaus universitetas

Tegul $s = \sigma + it$ žymi kompleksinį kintamąjį, o $0 < \lambda \leq 1$ ir $0 < \alpha \leq 1$ yra du parametrai. Lercho (Lerch) dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlé eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m}}{(m + \alpha)^s}$$

ir turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus vienintelį paprastąjį polių taške $s = 1$, kai $\lambda = 1$.

Pranešime nagrinėsime analizinių funkcijų aproksimavimą apibendrintaisiais Lercho dzeta funkcijos postūmiais $L(\lambda, \alpha, s + i\varphi(\tau))$ su realiąja funkcija $\varphi(\tau)$, apibrėžta, kai $\tau \geq \tau_0 > 0$, didėjančia iki $+\infty$ ir turinčia tokią monotoniinę išvestinę, kad

$$\varphi(2\tau) (\min(\varphi'(\tau), \varphi'(2\tau))) = O(\tau), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Bus pristatyti šie rezultatai.

1 teorema. Tarkime, kad aibė $\{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno, K yra juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ kompaktinė aibė su jungtuoju papildiniu, o $f(s)$ – tolydžioji aibėje K funkcija ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |L(\lambda, \alpha, s + i\varphi(\tau)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0. \quad (1)$$

Be to „lim inf“ gali būti pakeista „lim“ su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių aibę $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

2 teorema. Tarkime, kad parametrai λ ir α yra bet kokie. Tuomet egzistuoja netuščioji aibė $F_{\lambda, \alpha, \varphi} \subset D$ tokia, kad su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$, $f(s) \in F_{\lambda, \alpha, \varphi}$ ir $\varepsilon > 0$ galioja (1) nelygybė. Su „lim“ taip pat galioja analogiškas tvirtinimas kaip ir 1 teoremoje.

Pirmos ir antros teoremų tvirtinimai apibendrina [1] ir [2] straipsniuose gautus rezultatus su $\varphi(\tau) = \tau$.

Literatūra

- [1] Laurinčikas, A. 1997. The universality of the Lerch zeta-function. *Lith. Math. J.* 37(3):275–280.
- [2] Laurinčikas, A. 2019. “Almost” universality of the Lerch zeta-function. *Math. Commun.* 24(1):107–118.

Grouping Based Calculus for Propositional Linear Temporal Logic

Kostas Ragauskas, Adomas Birštunas

Vilnius University

In this paper, the authors research the problem of loops in linear temporal logic PLTL. The task involves defining the standard rule application process for the derivation procedure (as used in [1] and [2], determining and proving properties for the absence of a loop beneath some sequent, and creating a new calculus G*TL, which uses the proposed sequent grouping method, along with the method of marks (similar marking concepts were proposed in [2] and [3]. New marks $\alpha, \delta \in \{\emptyset, -\}$ are introduced to capture the absence of a loop beneath the current sequent. The standard rules of propositional linear temporal logic's calculus G_LPLTL [2] are modified with the addition of newly proposed marks. A new type of structural rule (GROUP), along with a modification of the rule (\circ) to (\circ^*) is introduced:

$$\frac{\Xi_1, \Xi_2, \circ\Lambda_1, \circ\Lambda_2, \circ\Box\Pi, \circ\blacksquare\Omega \vdash^\alpha \circ\Box\Psi, \circ\Box\Delta, \circ\Box\Theta, \Phi_1, \Phi_2, \circ X_1, \circ X_2}{\Sigma_1, \circ\Gamma_1 \vdash^\alpha \Sigma_2, \circ\Gamma_2} \text{ (GROUP)}$$

$$\frac{\Lambda_1, \Lambda_2, \Box\Pi, \blacksquare\Omega \vdash^\delta \Box\Psi, \Box^*\Delta, \Box\Theta, X_1, X_2}{\Xi_1, \Xi_2, \circ\Lambda_1, \circ\Lambda_2, \circ\Box\Pi, \circ\blacksquare\Omega \vdash^\alpha \circ\Box\Psi, \circ\Box\Delta, \circ\Box\Theta, \Phi_1, \Phi_2, \circ X_1, \circ X_2} (\circ^*)$$

$$\delta = -, \text{ if } \Xi_1 \cup \Phi_1 \cup \circ\Lambda_1 \cup \circ X_1 \neq \emptyset$$

$$\delta = \emptyset, \text{ if } \Xi_1 \cup \Phi_1 \cup \circ\Lambda_1 \cup \circ X_1 = \emptyset$$

Here, the premise of the (GROUP) rule contains the same formulas as its conclusion. The main difference is that the formulas are grouped into distinct sets according to their inner structure. Operator \blacksquare in this case is a traditional \Box operator, satisfying additional features.

The complexity of the proposed grouping operation in calculus G*TL is presented. Finally, it is shown that the loop detection mechanism used in calculus G*TL is efficient, comparing it with other known calculi for logic PLTL.

References

- [1] Birštunas, A. 2008. Restrictions for loop-check in sequent calculus for temporal logic. *Lith. Math. J.*, 48:269–274.
- [2] Pliuškevičius, R. 2017. Method of marks for propositional linear temporal logic. *Lith. Math. J.*, 55:46–50.
- [3] Sadrzadeh, M., Dyckhoff, R. 2010. Positive logic with adjoint modalities: Proof theory, semantics, and reasoning about information. *The Review of Symbolic Logic* 3(3):351-373.

Diskrečioji Mišu teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms, susijusioms su periodinėmis dzeta funkcijomis

Audronė Rimkevičienė[†], Aidas Balčiūnas[‡]

[†] Šiaulių valstybinė kolegija

[‡] Vilniaus universitetas

Mišu (Mishou) [3] straipsnyje įrodė jungtinio universalumo teoremą Rymano (Riemann) ir Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcijoms. Diskrečioji Mišu teoremos versija buvo gauta [2] straipsnyje.

Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ ir $\mathbf{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra dvi periodinės kompleksinių skaičių sekos. Be to, su fiksuotu $\theta > 1/2$, tegul $v_u(m) = \exp\{-(m/u)^\theta\}$ ir $v_u(m, \alpha) = \exp\{-((m+\alpha)/u)^\theta\}$, čia $0 < \alpha \leq 1$, o $u > 0$. Apibrėžkime dvi eilutes $\zeta_u(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m v_u(m) m^{-s}$ ir $\zeta_u(s, \alpha; \mathbf{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m v_u(m, \alpha) (m+\alpha)^{-s}$. Pastarosios eilutės absoliučiai konverguoja bet kurioje pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$. Šios eilutės yra atitinkamai susijusios su periodine ir periodine Hurvico dzeta funkcijomis. Tegul, su teigiamaisiais h_1 ir h_2 , $L(\mathbb{P}; \alpha, h_1, h_2, \pi) = \{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}), (h_2 \log p : p \in (m+\alpha)), 2\pi\}$, čia \mathbb{P} yra visų pirminių skaičių aibė.

Pranešime pristatysime poros analizinių funkcijų aproksimavimą funkcijų $\zeta_{u_N}(s; \mathbf{a})$ ir $\zeta_{u_N}(s, \alpha; \mathbf{b})$ postūmiais su $u_N \rightarrow \infty$, kai $N \rightarrow \infty$. Tegul \mathcal{K} yra juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ kompaktinių aibių klasė su jungiaisiais papildiniais, o $H_0(K)$ ir $H(K)$, su $K \in \mathcal{K}$, yra atitinkamai tolydžiųjų neįgyjančių nulių ir tolydžiųjų funkcijų aibėje K bei analizinių K viduje klasės. Tuomet yra teisinga teorema [1].

Teorema. *Tarkime, kad seka \mathbf{a} yra multiplikatyvioji, aibė $L(\mathbb{P}; \alpha, h_1, h_2, \pi)$ – tiesiškai nepriklausoma virš racionalių skaičių kūno ir $u_N \rightarrow \infty$ bei $u_N \ll N^2$, kai $N \rightarrow \infty$. Tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, o $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ riba*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \#\{0 \leq k \leq N : \sup_{s \in K_1} |\zeta_{u_N}(s + ikh_1; \mathbf{a}) - f_1(s)| < \varepsilon_1, \\ \sup_{s \in K_2} |\zeta_{u_N}(s + ikh_2, \alpha; \mathbf{b}) - f_2(s)| < \varepsilon_2\}$$

egzistuoja ir yra teigiama su visais $\varepsilon_1 > 0$ ir $\varepsilon_2 > 0$, nebent išskyrus skaičių aibę $\varepsilon_1 > 0$ ir $\varepsilon_2 > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Balčiūnas, A., Jasas, M., Rimkevičienė, A. 2024. A discrete version of the Mishou theorem related to periodic zeta-function. *Math. Modell. Analysis* 29:331–346.
- [2] Buivydas, E., Laurinčikas, A. 2015. A discrete version of the Mishou theorem. *Ramanujan J.* 38:331–347.
- [3] Mishou, H. 2007. The joint value-distribution of the Riemann zeta function and Hurwitz zeta functions. *Lith. Math. J.* 47:32–47.

Apie Hurvico tipo dzeta funkcijų universalumą

Mindaugas Stoncelis

Vilniaus universitetas

Tarkime, kad $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ yra periodinė, su periodu $q \in \mathbb{N}$, kompleksinių skaičių a_m seka, $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$. Periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$, pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Kai $a_m \equiv 1$, turime klasikinę Hurvico dzeta funkciją $\zeta(s, \alpha)$. Iš sekos \mathbf{a} periodiškumo seka, kad srityje $\sigma > 1$,

$$\zeta(s, \alpha; \mathbf{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{l=0}^{q-1} a_l \zeta\left(s, \frac{l + \alpha}{q}\right).$$

Iš čia ir Hurvico dzeta funkcijos savybių turime, kad $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastas poliūs su reziduumu

$$\frac{1}{q} \sum_{l=0}^{q-1} a_l.$$

Irodyta, kad $\zeta(s, \alpha; \mathbf{a})$ yra universalūs Voronino prasme tam tikriems parametrams α : rezultatai su transcendenčiuoju parametru α pateikti [1], su racionaliuoju α – [2].

Pranešime aptarsime Dirichlė eilučių, susijusių su periodinėmis Hurvico dzeta funkcijomis, universalumo tyrimų rezultatus [3]. Tarkime, jog $\theta > 1/2$ yra fiksuotas skaičius, $m \in \mathbb{N}_0$, $u > 0$ ir

$$\zeta_u(s, \alpha; \mathbf{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m v_u(m, \alpha)}{(m + \alpha)^s} \quad \text{su} \quad v_u(m, \alpha) = \exp\left\{-\left(\frac{(m + \alpha)}{u}\right)^\theta\right\}.$$

Kadangi $|a_m| \leq C$, $m \in \mathbb{N}_0$, su $C < \infty$, eilutė, apibrėžianti $\zeta_u(s, \alpha; \mathbf{a})$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$ su bet kuriuo baigtiniu σ_0 .

Detaliai aptarsime analizinių funkcijų aproksimavimą postūmiais $\zeta_{u_T}(s + i\tau, \alpha; \mathbf{a})$ su $\tau \in \mathbb{R}$ ir $u_T \rightarrow \infty$, kai $T \rightarrow \infty$.

Literatūra

- [1] Javtokas, A., Laurinčikas, A. 2006. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transforms Spec. Funct.* 17(10):711–722.
- [2] Laurinčikas, A., Macaitienė, R., Mochov, D., Šiaučiūnas, D. 2018. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter. *Siber. Math. J.* 59(5):894–900.
- [3] Balčiūnas, A., Laurinčikas, A., Stoncelis, M. 2023. On a Dirichlet series connected to a periodic Hurwitz zeta-function with transcendental and rational parameter. *Math. Modell. Analysis*, 28(1):91–101.

Parabolinių formų dzeta funkcijų universalumas trumpuose intervaluose

Darius Šiaučiūnas

Vilniaus universitetas

Tegul $\mathcal{F}(z)$ žymi pilnosios modulinės grupės svorio κ parabolinę formą, turinčią begalybėje skleidinį Furjė (Fourier) eilute

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c(m)e^{2\pi imz}.$$

Šią formą atitinkanti dzeta funkcija $\zeta(s, \mathcal{F})$, $s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > (\kappa + 1)/2$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \mathcal{F}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}$$

ir turi analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, kurioje ji yra sveikoji funkcija. Be to, tarkime, kad $\mathcal{F}(z)$ yra normuota Hekės (Hecke) tikrinė forma. Tuo atveju funkcija $\zeta(s, \mathcal{F})$ turi Oilerio sandaugą pirminiais skaičiais.

Pranešimas yra skirtas pristatyti funkcijos $\zeta(s, \mathcal{F})$ universalumo savybę. Tegul $D_{\mathcal{F}} = \{s \in \mathbb{C} : \kappa/2 < \sigma < (\kappa + 1)/2\}$. Tuomet [1] straipsnyje buvo įrodyta, kad postūmiai $\zeta(s + i\tau, \mathcal{F})$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuoja juostoje $D_{\mathcal{F}}$ analizinę ir neįgyjančią nulių funkciją. Mūsų tikslas yra aptarti funkcijos $\zeta(s + i\tau, \mathcal{F})$ universalumą trumpuose intervaluose. Tam naudosime tokią hipotezę: egzistuoja $\sigma_0 \in (\kappa/2, (\kappa + 1)/2)$ ir $0 < \delta < 1$ tokie, kad, su $\sigma \in (\kappa/2, \sigma_0]$ ir $T^\delta \leq H \leq T$, tolygiai pagal H galioja įvertis

$$\int_{T-H}^{T+H} |\zeta(s + i\tau; \mathcal{F})|^2 dt \ll_{\sigma} H.$$

Tegul $\mathcal{K}_{\mathcal{F}}$ žymi juostos $D_{\mathcal{F}}$ kompaktinių aibių klasę su jungiaisiais papildiniais, o $H_{0\mathcal{F}}(K)$, $K \in \mathcal{K}$, – tolydžiųjų neįgyjančių nulių aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasę.

Teorema. [2]. *Tarkime, kad galioja visi išvardinti reikalavimai formai $\mathcal{F}(z)$. Tegul $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{F}}$, $f(s) \in H_{0\mathcal{F}}(K)$ ir $T^\delta \leq H \leq T$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{H} \text{meas} \left\{ \tau \in [T, T + H] : \sup_{s \in K} |f(s) - \zeta(s + i\tau; \mathcal{F})| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, „lim inf“ gali būti pakeista „lim“ su visomis $\varepsilon > 0$ reikšmėmis, nebent išskyrus daugiausiai skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Laurinčikas, A., Matsumoto, K. 2001. The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms. *Acta Arith.* 98(4):345–359.
- [2] Laurinčikas, A., Šiaučiūnas, D. 2024. On universality in short intervals for zeta-functions of certain cusp forms. *Math. Slovaca* 74(3):595–606.

Išplėstinė Selbergo klasė ir pirminės funkcijos

Raivydas Šimėnas

Vilniaus universitetas

Pirminės funkcijos sąvoka atsirado praeito amžiaus viduryje. Tam tikra prasme pirminės funkcijos skaidosi tik trivialiai kompozicijos prasme. Pirmoji funkcija, kuriai buvo įrodytas pirminiškumas, yra $e^s + s$. Vėliau pirminiškumas buvo įrodytas gama funkcijai ir Rymano dzeta funkcijai [4], Selbergo dzeta funkcijai kompaktiniu atveju [3], Hurvico dzeta funkcijai [1]. Čia nagrinėjame išplėstinės Selbergo klasės funkcijų pirminiškumo problemą [2].

Literatūra

- [1] Dundulis, M., Garunkštis, R., Karikovas, E., Šimėnas, R. 2023. Hurwitz zeta function is prime. *Mathematics* 11(5):1150.
- [2] Garunkštis, R., Panavas, T., Šimėnas, R. 2024. Decompositions of the extended Selberg class functions. (pateiktas spaudai).
- [3] Garunkštis, R., Steuding, J. 2020. On primeness of the Selberg zeta-function. *Hokkaido Math. J.* 49:451–462.
- [4] Liao, L., Yang, C. C. 2003. On some new properties of the Gamma function and the Riemann zeta function. *Math. Nachr.* 257:59–66.

Gramo taškai periodinės dzeta funkcijos universalume

Monika Tekorė

Vilniaus universitetas

Tegul $\mathbf{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su periodu q , o $s = \sigma + it$ – kompleksinis kintamasis. Periodinė dzeta funkcija yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s; \mathbf{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m^{-s}, \quad \sigma > 1,$$

ir meromorfiniu pratęsimu visoje kompleksinėje plokštumoje.

Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ su visais $s \in \mathbb{C}$ tenkina funkcinę lygtį

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Pagrindinis šios lygties narys yra funkcija $g(s) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$. Tegul $\theta(t)$, $t \geq 0$, žymi funkcijos $g(s)$ pokytį išilgai atkarpos, jungiančios taškus $s = 1/2$ ir $s = 1/2 + it$. Funkcija $\theta(t)$ yra monotoniškai didėjanti ir neaprežta iš viršaus su $t > t^*$, $t^* = 6.289836 \dots$. Todėl lygtis su $t > t^*$

$$\theta(t) = (n-1)\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

turi vienintelį sprendinį t_n . Skaičiai t_n yra vadinami Gramo taškais, kurie yra susiję su funkcijos $\zeta(s)$ netrivialiaisiais nuliais.

Pranešime pristatysime periodinės dzeta funkcijos diskrečiojo universalumo teoremą postūmiuose naudodami seką $\{t_n\}$.

Teorema. [1]. *Tarkime, kad seka \mathbf{a} yra multiplikatyvioji, K yra juostos $\{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ kompaktinė aibė su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ – tolydžioji, neįgyjanti nulių aibėje K ir analizinė aibės K viduje funkcija. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k; \mathbf{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k; \mathbf{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\}$$

egzistuoja ir yra teigiama su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičių $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Literatūra

- [1] Šiaučiūnas, D., Tekorė, M. 2024. Gram points in the universality of the Dirichlet series with periodic coefficients. *Mathematics* 11:4615.

Selbergo-Štoidingo klasės diskretus jungtinis universalumas ir netrivialūs Rymano dzeta funkcijos nuliai

Benjaminas Togobickij, Roma Kačinskaitė

Vilniaus universitetas

\tilde{S} pažymėkime Dirichlė eilučių klasę, kurią apibrėžė A. Selbergas [3], o vėliau tam tikromis sąlygomis papildė J. Štoidingas [4]. Tegul $0 < \gamma_1 < \dots \leq \gamma_k \leq \gamma_{k+1} \leq \dots$ yra Rymano dzeta funkcijos netrivialiųjų nulių menamųjų dalių seka, kuriai yra teisinga modifikuota Montgomerio hipotezė apie porų koreliaciją [2]. R. Kačinskaitė nagrinėjo L funkcijų, priklausančių klasei \tilde{S} , diskretųjį universalumą, kai postūmiai sudaromi panaudojant diskrečiąją aibę $\{h\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$, $h > 0$ (žr. [1]).

Pranešime kalbėsime apie diskretųjį vienašakį tam tikrų analizinių funkcijų rinkinių aproksimavimą L funkcijų iš klasės \tilde{S} rinkinių postūmiais. Šiuo atveju taip pat yra panaudojama netrivialiųjų nulių seka $\{\gamma_k\}$.

Literatūra

- [1] Kačinskaitė, R. 2022. On discrete universality in the selberg–steuding class. *Siberian Mathematical Journal* 63(2):277–285.
- [2] Montgomery, H. L. 1973. The pair correlation of zeros of the zeta function. In: *Analytic Number Theory*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV. Providence, R.I.: American Mathematical Society. pp. 181–193
- [3] Selberg A., 1992. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series. In: *Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory*, Held at Maiori, Amalfi, Italy, 25–29 September, 1989 . E. Bombieri et al. (eds.), Salerno: University di Salerno. pp. 367–385.
- [4] Steuding J. 2007. *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math. Vol. 1877. Berlin:Springer.

Diferencialinės lygtys ir skaičiavimo metodai

Diskrečiojo Šturmo–Liuvilio uždavinio su dvitaške nelokaliaja sąlyga tyrimas

Kristina Bingelė[†], Artūras Štikonas[‡]

[†] Vilnius TECH

[‡] Vilniaus universitetas

Pranešime nagrinėjamas diskrečiojo Šturmo–Liuvilio uždavinio su klasikine kraštine sąlyga (Dirichlė arba Noimano):

$$-u'' = \lambda u, \quad t \in (0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{arba} \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

ir antra dvitaške nelokaliaja sąlyga (vienas iš keturių variantų)

$$u(1) = \gamma u(\xi), \quad u'(1) = \gamma u'(\xi), \quad u(1) = \gamma u'(\xi), \quad u'(1) = \gamma u(\xi), \quad (3)$$

spektrinių kreivių priklausomybė nuo parametrų $\gamma \in \mathbb{R}$ ir $\xi \in [0, 1]$.

Intervale $[0, 1]$ apibrėžkime diskrečiuosius tinklus: $\bar{\omega}^h = \{t_j = jh, j = \overline{0, n}\}$, $\omega^h = \{t_j = jh, j = \overline{1, n-1}\}$ su žingsniu $h_j \equiv h$, $\omega_{1/2}^h = \{t_{j+1/2} = (t_j + t_{j+1})/2, j = \overline{0, n-1}\}$ su žingsniu $h_{j+1/2} = t_{j+1/2} - t_{j-1/2} \equiv h$. ir $\bar{\omega}_{1/2}^h = \omega_{1/2}^h \cup \{t_{-1/2} = 0, t_{n+1/2} = n\}$ su žingsniu $h_{1/2} = t_{1/2} - t_{-1/2} = h/2$, $h_{n+1/2} = t_{n+1/2} - t_{n-1/2} = h/2$. Darome prielaidą, kad $\xi = m/n$ sutampa su tinklo $\bar{\omega}^h$ tašku. Diferencialinį uždavinį (1)–(3) aproksimuojame skirtuminių lygčių sistema:

$$-\delta^2 U = \lambda U, \quad t \in \omega^h, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$U_0 = 0 \quad \text{arba} \quad (\bar{\delta}U)_0 = 0,$$

ir viena iš keturių nelokaliųjų sąlygų:

$$U_n = \gamma U_m, \quad (\bar{\delta}U)_n = \gamma (\bar{\delta}U)_m, \quad U_n = \gamma (\bar{\delta}U)_m, \quad (\bar{\delta}U)_n = \gamma U_m.$$

Pranešime pristatomi rezultatai apie diskrečiojo uždavinio spektrą, gauti, kai išvestinė kraštinėse sąlygose pakeičiama natūraliaja jos aproksimacija $\bar{\delta}$.

Literatūra

- [1] Bingelė, K., Bankauskienė, A., Štikonas, A. 2020. Investigation of spectrum for a Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary conditions. *Math. Modell. Anal.* 25(1):53–70.
- [2] Bingelė, K., Štikonas, A. 2024. Investigation of a discrete Sturm–Liouville problem with two-point nonlocal boundary condition and natural approximation of a derivative in boundary condition. *Math. Modell. Anal.* 29(2):309–330.
- [3] Samarskii, A. A., Nikolaev, E. S. 1989. *Numerical Methods for Grid Equations*, (Vol. I, *Iterative Methods*; Vol. II, *Direct Methods*). Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag.

Kairiojo prieširdžio apendikso klasifikavimo sistemų palyginimas

Sofija Marija Everatt, Kristina Kaulakytė

Vilniaus universitetas

Žinoma, kad pacientams, turintiems prieširdžių virpėjimą ir patyrusiems insultą, didžioji dalis trombų susiformavo kairiojo prieširdžio apendikse. Palankias sąlygas trombui formuotis šioje širdies dalyje sudaro dėl sumažėjusio tekėjimo greičio užsistovėjęs kraujas. Todėl tyrimo tikslas - įvertinti, kaip dvi kairiojo prieširdžio apendikso klasifikavimo sistemos atspindi kraujo tekėjimo greičių skirtumus skirtingose geometrijose. Tyrime buvo naudoti konkrečių pacientų, turinčių prieširdžių virpėjimą, kompiuterinės tomografijos duomenys. Rezultatai parodė, kad klasifikacijoje į keturias kategorijas (viščiuko sparnelį, kaktusą, vėjarodį ir žiedinį kopūstą [1]) kraujo tekėjimo greitis viščiuko sparnelyje buvo ženkliai didesnis nei kitose kategorijose, kur greičiai buvo panašūs. Klasifikacijoje į aukštos ir žemos rizikos apendiksus (žema rizika - viščiuko sparnelis su smailiu kampu, aukšta - visos likusios geometrijos [2]), aukštos rizikos apendiksuose greičiai buvo mažesni nei žemos rizikos apendikse. Taigi, gauti rezultatai parodo, kad antroji klasifikacija atskiria apendiksus, kuriuose greitis didesnis nuo tų, kuriuose jis mažesnis.

Literatūra

- [1] Karim, N., Ho, S. Y., Nicol, E., Li, W., Zemrak, F. ir kiti. 2020. The left atrial appendage in humans: structure, physiology, and pathogenesis. *Europace*, 22(1):5–18.
- [2] Yaghi, S., Chang, A. D., Akiki, R., Collins S., Novack, T. ir kiti. 2020. The left atrial appendage morphology is associated with embolic stroke subtypes using a simple classification system: A proof of concept study. *Journal of Cardiovascular Computed Tomography* 14(1):27–33.

Regularity Results for Very Weak Time-Periodic Poiseuille-Type Solution with Minimally Regular Flow Rate

Rita Juodagalvytė, Kristina Kaulakytė, Konstantinas Pileckas

Vilnius University

In this presentation, we provide a summary of our results concerning the time-periodic very weak solutions of the heat equation with a non-local additional condition of the prescribed flux

$$F(t) = \int_{\sigma} U(x, t) dx$$

and their regularity properties. Specifically, we present an example of a function $F(t)$ that belongs to $L^2(-\pi, \pi)$ but $F \notin W^{\beta, 2}(-\pi, \pi)$ for $0 < \beta < 1$. The very weak solution corresponding to such flux F , has the regularity as stated in the definition (see [1], [2]) and it is not better. Furthermore, we discuss results that suggest a correlation between the improvement of solutions regularity and the increase in regularity of the given function F .

References

- [1] Kaulakytė, K., Kozulinas, N., Pileckas, K. 2021. Time-periodic Poiseuille-type solution with minimally regular flow rate. *Nonlinear analysis: modelling and control* 26(5):947–968.
- [2] Pileckas, K., Čiegis, R. 2020. Existence of nonstationary Poiseuille type solutions under minimal regularity assumptions. *Z. Angew. Math. Phys.* 71:192.

Time Periodic Inverse Problem with Nonlocal Condition

Kristina Kaulakytė, Nikolajus Kozulinas, Konstantinas Pileckas

Vilnius University

In a bounded domain σ we consider the time periodic boundary value problem for the heat equation:

$$\begin{aligned}U_t(x, t) - \nu \Delta U(x, t) &= q(t), \\U(x, t)|_{\partial\sigma} &= 0, \\U(x, 0) &= U(x, 2\pi), \\ \int_{\sigma} U(x, t) dx &= F(t), \quad F(0) = F(2\pi),\end{aligned}\tag{1}$$

where U and q are the unknown functions while F is a given function, i.e. for given F we find the right hand side q such that the solution U satisfies the additional nonlocal condition

$$\int_{\sigma} U(x, t) dx = F(t).$$

Problem (1) can be interpreted as an inverse parabolic problem. Using the concept of a very weak solution introduced in paper [2] for the initial boundary value problem, we prove the existence of a unique weak solution of time periodic problem (1) under the assumption that function F has minimal regularity, i.e. function F belongs only to $L^2(0, 2\pi)$ (see [1]).

References

- [1] Kaulakytė, K., Kozulinas, N., Pileckas, K. 2021. Time-periodic Poiseuille-type solution with minimally regular flow rate. *Nonlinear Anal. Model. Control* 26(5):947–968.
- [2] Pileckas, K., Čiegis, R. 2020. Existence of nonstationary Poiseuille type solutions under minimal regularity assumptions. *Z. Angew. Math. Phys.* 71:192.

Poiseuille-Type Approximations for Axisymmetric Flow in a Thin Tube with Thin Stiff Elastic Wall[§]

Nikolajus Kozulinas, Kristina Kaulakytė, Grigory Panasenko,
Konstantinas Pileckas, Vytenis Šumskas

Vilnius University

In this talk we study a model of Navier-Stokes fluid motion in a pipe surrounded by an elastic wall which was developed by G. Panasenko and R. Stavre in [1] and taking into account that physical properties of the wall are constant in time and simplifying the functions which describe the velocity of the fluid and the displacement of the wall we derive the fourth order PDE which depends only on one space variable and time. Subsequently, we make a comparative analysis of a numerical solution to the full Navier-Stokes equations coupled with a moving wall and to the derived fourth order simplified PDE in two geometries: a cylinder and a Y-shaped network of cylinders. Remarkably, in the case when the difference in prescribed velocities between inlet and outlet of the cylinder is small, the solutions on cross-sections in the middle of a cylinder obtained from the both approaches are similar. Notably, the solution of the fourth order PDE demands less computational time, resulting in resource savings.

References

- [1] Kaulakytė, K., Kozulinas, N., Panasenko, G., Pileckas, K., Šumskas, V. 2023. Poiseuille-type approximations for axisymmetric flow in a thin tube with thin stiff elastic wall. *Mathematics* 11(9):2106.
- [2] Panasenko, G. P., Stavre, R. 2020. Three dimensional asymptotic analysis of an axisymmetric flow in a thin tube with thin stiff elastic wall. *J. Math. Fluid Mech.* 22:20.

[§]The research was supported by the project "Multiscale Mathematical and Computer Modeling for Flows in Networks: Application to Treatment of Cardiovascular Diseases" (No. 09.3.3-LMT-K-712-17-0003)

Netiesinės parabolinės lygties su integraline nelokalioja sąlyga skirtuminės schemos konvergavimas

Kristina Pupalaigė[†], Mifodijus Sapagovas[‡]

[†] Kauno technologijos universitetas
[‡] Vilniaus universitetas

Darbe sprendžiame baigtinių skirtumų metodu dvimatę netiesinę parabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \quad t \in (0, T],$$

su duotomis kraštinėmis sąlygomis trijų stačiakampės srities kraštinių taškuose ir pradine sąlyga

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, 0, t) &= \mu_1(x, t), \quad u(x, 1, t) = \mu_2(x, t), \quad u(0, y, t) = \mu_3(y, t) \end{aligned}$$

ir su nelokalioja integraline sąlyga vienoje stačiakampio kraštinėje

$$u(1, y, t) = \gamma \int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy + \mu_4(y, t).$$

Užrašome baigtinių skirtumų metodą ir įvertiname sprendinio paklaidą taikydami M matricų savybes, bei tiriamo diferencialinės schemos konvergenciją. Pagrindinis tyrimo rezultatas – sukonstruota mažorantė, kuri taikoma diferencialinės schemos stabilumo ir konvergavimo tyrime.

Literatūra

- [1] Bingelė, K., Bankauskienė, A., Štikonas, A. 2019. Spectrum curves for a discrete Sturm-Liouville problem with one integral boundary conditional. *Nonlinear Anal. Model. Control* 24(5):755–774.
- [2] Pupalaigė, K., Sapagovas, M., Čiupaila, R. 2022. Nonlinear elliptic equation with nonlocal integral boundary condition depending on two parameters. *Math. Model. Anal.* 27(4):610–628.
- [3] Sapagovas, M., Novickij, J. 2023. On stability in the maximum norm of difference scheme for nonlinear parabolic equation with nonlocal condition. *Nonlinear Anal. Model. Control* 28(2):365–376.
- [4] Sapagovas, M., Štikonienė, O., Jakubėlienė, K., Čiupaila, R. 2019. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. *Bound. Value Probl.* 94:1–16.

YAG sintezės matematinis modeliavimas

Vytenis Šumskas, Rokas Astrauskas, Feliksas Ivanauskas,
Aivaras Kareiva, Andrius Pakalniškis

Vilniaus universitetas

Šiame pranešime pateikiamas itrio aliuminio granato gamybos cheminės reakcijos matematinis modelis, kuriame naudojamos ankstesniuose darbuose apskaičiuotos konstantos [1, 2].

Modeliuojant cheminę reakciją prie įvairių temperatūrų, nagrinėjamos prielaidos, kuriomis būtų galimas reakcijos išeigos padidinimas. Apskaičiuojami optimalūs laikai, kokių momentu reagentų išmaišymas yra efektyviausias išeigos prasme. Modeliuojami įvairūs išmaišymo atvejai.

Pranešime aptariamos skaičiavimams naudotos baigtinių skirtumų schemos, pateikiamos proceso vizualizacijos ir suformuluojamos matematinio modeliavimo būdų gautos rekomendacijos cheminės reakcijos išeigos didinimui.

Literatūra

- [1] Ivanauskas, F., Kareiva, A., Lapcun, B. 2009. Computational modelling of the YAG synthesis. *J. Math. Chem.* 46:427–442.
- [2] Mackevičius, M., Ivanauskas, F., Kareiva, A., Jasaitis, D. 2012. A closer look at the computer modelling and sintering optimization in the preparation of YAG. *J. Math. Chem.* 50:2291–2302.

Matematikos istorija ir didaktika

Iš VU Matematikos ir informatikos fakulteto istorijos: studentų priėmimo į matematikos specialybes raida XX a. antroje pusėje

Igoris Belovas

Vilniaus universitetas

Apžvelgiama, remiantis pirminių šaltinių duomenimis, matematikos specialybių studentų kontingento ir priėmimo į Vilniaus Valstybinį Universitetą raida (pradedant nuo 1945 m.).

Ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogų įsitikinimai apie matematiką ir jos mokymą(si)

Monika Grigaliūnienė[†], Jo Van Hoof[‡]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] Turku universitetas (Suomija)

Ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogai yra svarbūs autoritetai vaikams [3]. Vaikai yra stipriai paveikiami pedagogų nuomonių ir įsitikinimų, jų nuostatos apie matematiką ir jos mokymą(si) formuojasi ant tų pagrindų, kuriuos jiems sudeda ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogai [2]. Nors pagal specializaciją ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogai nėra matematikai ir neturi turėti jokio papildomo matematikos išsilavinimo (be mokyklinės matematikos kurso), būtent jų atsakomybė yra ankstyvasis matematikos ugdymas. Kadangi ankstyvasis matematikos ugdymas yra pamatas tolimesniam matematikos mokymuisi, labai svarbu, kad ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogai suprastų ankstyvosios matematikos esmę [1]. Šiame tyrime keliamas klausimas - kokius įsitikinimus turi ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogai apie ankstyvąją matematiką ir jos mokymą. Tyrime dalyvavo 112 Lietuvos esamų ir būsimų ikimokyklinio ir priešmokyklinio ugdymo pedagogų. Tyrimo instrumentas - trijų dalių klausimynas (viso 56 teiginiai); klausimyne pateiktus teiginius esamieji ir būsimieji pedagogai vertino Likerto skalėje. Šiame pristatyme bus analizuojami keli pasirinkti klausimyno teiginiai, susiję su įsitikinimais apie matematiką ir jos mokymą(si).

Literatūra

- [1] Björklund, C., Barendregt, W. 2016. Teachers' pedagogical mathematical awareness in Swedish early childhood education. *Scandinavian Journal of Educational Research* 60(3):359–377.
- [2] Clements, D. H., Sarama, J. 2018. Myths of Early Math. *Education sciences* 8(2):71.
- [3] Tymms, P., Jones, P., Albone, S., Henderson, B. 2009. The first seven years at school. *Educ. Assess. Eval. Account.* 21:67–80.

Matematikos olimpiadų užduočių sprendimo rezultatų palyginimas

Karolina Kanišauskienė

Vilniaus universitetas

Tyrimo tikslas – palyginti dvejose skirtingose matematikos olimpiadose buvusių vienodų užduočių, kurias sprendė skirtingų klasių (9–10/11/12 kl.) moksleiviai, sprendimo rezultatus.

Aritmetinių tekstinių uždavinių analizė pradinių klasių vadovėliuose

Ieva Kilienė

Vilniaus universitetas

Tekstiniai uždaviniai yra viena sudėtingiausių matematikos mokymo temų ir tuo pačiu viena dažniausiai naudojamų. Šiame darbe aptariamas pradinių klasių vadovėlių tyrimas, kuriame atliekama išsami tekstinių uždavinių analizė lietuviškame vadovėlių rinkinyje ir palyginama su analogiška Singapūro ir Ispanijos vadovėlių analize. Remiantis gautais statistiniais duomenimis siūlomas metodas leidžiantis atlikti didesnės imties duomenų analizę.

Literatūra

- [1] Chen, Z. 1999. Schema induction in children's analogical problem solving. *Journal of Educational Psychology* 91(4):703.
- [2] Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., Nuerk, H.-C. 2015. Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in psychology* 6:348.
- [3] Marshall, S. P. 2012. *Schema-Based Instruction*, Encyclopedia of the Sciences of Learning. Boston, MA: Springer.
- [4] Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., Sook Kim, M. 1986. An analysis of addition and subtraction word problems in American and Soviet elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction* 3(3): 153–171.
- [5] Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S. 1994. Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction* 4(4):273–294.
- [6] Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., Van Dooren, W. 2020. Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM* 52:1–16.
- [7] Vicente, S., Verschaffel, L., Sánchez, R., Múñez, D. 2022. Arithmetic word problem solving. Analysis of Singaporean and Spanish textbooks. *Educational Studies in Mathematics* 111(3):375–397.
- [8] Xin, Y. P. 2007. Word problem solving tasks in textbooks and their relation to student performance. *The Journal of Educational Research* 100(6):347–360.

Trupmenų anatomija

Ričardas Juozas Kudžma

Vilniaus universitetas

Dvi priežastys, dėl kurių pradėjau domėtis trupmenomis. Pirma, R. Norvaiša per seminarus kartojo ir kartojo, kad vadovėliuose du trupmenų apibrėžimai suplakami į vieną. Apie tai jis kalbėjo LXIV LMD konferencijoje [1] ir siūlė visa tai spręsti skaičių tiesėje. Antra, mano aistra iš akmenų daryti matematinius ženklus. Sudėlioju 12 akmenų kompoziciją, kurioje tie du trupmenų apibrėžimai atsiskiria. Gilinantis išaiškėjo, kad tarpai tarp akmenų, reiškiantys ryšius tarp jų, yra gal net svarbesni už pačius akmenis, reiškiančius skaičius ar trupmenas.

Supratau, kad trupmena yra fantastiškas žmonijos išradimas. Trupmenoje užkoduoti du veiksmai – dalyba ir daugyba. Knygose rašoma, kad egiptiečiai vartojo trupmenas su skaitikliu vienetą. Manau, kad tai ne visai tikslu. Egiptiečiai vartojo dalis – pusę, trečdalį, dešimtadalį, šimtadalį ir t.t. Egiptiečių hieroglifuose buvo užkodotas tik vienas veiksmas – dalyba. Kad egiptietiška „pusė“ taptų „viena antrąja ½“, prirėkė kelių tūkstančių metų.

Mano modelyje pavaizduoti du trupmenos 3/2 gavimo būdai, kuriuos galima taip simboliškai pavaizduoti

$$1 : 2 \times 3 = 3/2,$$

$$1 \times 3 : 2 = 3/2.$$

Paprastai, pirmoji lygybė laikoma apibrėžtimi, o antroji teiginiu ir turi būti įrodoma. Žinoma, reikia dalmens 3 : 2 (ir 1 : 2) apibrėžties, kurios vadovėliuose nėra. Žiūrint į akmenis, į tą patį modelį iš magnetų arba į paveiksliuką su skaičiais ir rodyklėmis, natūraliai atsiranda ir trečias, tiesiausias kelias iš 1 į 3/2, būtent daugyba iš trupmenos

$$1 \times 3/2 = 3/2.$$

Daugyba iš trupmenos ne tik sujungia daugybos ir dalybos veiksmus, bet ir panaikina tų veiksmų eiliškumą. Modelis buvo kurtas parodyti trupmenos 3/2 atsiradimą. Gana netikėtai 3/2 pasirodė ir kaip veiksmas, operatorius, t.y. daugyba iš 3/2. Tai gal ir nauja lietuviškose tekstuose, bet gana įprasta kitose šalyse, pvz., Airijoje [2].

Literatūra

- [1] Norvaiša, R. 2023. Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose. *Lietuvos matematikos rinkinys. Ser. B* 64:59–74.
- [2] [https://pdst.ie/sites/default/files/DST%20Guide%20to%20Teaching%20Fractions%20in%20Irish%20Primary%20Schools\(1\).pdf](https://pdst.ie/sites/default/files/DST%20Guide%20to%20Teaching%20Fractions%20in%20Irish%20Primary%20Schools(1).pdf).

Trumpesnis pagrindinės algebros teoremos įrodymas

Juozas Juvencijus Mačys

Vilniaus universitetas

Pagrindinę algebros teoremą realiuoju atveju galima suformuoti taip:

Lyginio laipsnio n polinomą $\sum c_k x^k$ galima išskaidyti kvadratiniais trinariais.

Paprasta įsitikinti (žr. [1]), kad jos įrodymui užtenka patikrinti, jog egzistuoja tokie r ir φ ($0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), su kuriais

$$U \stackrel{\circ}{=} \sum c_k r^k \cos k\varphi = 0, \quad V \stackrel{\circ}{=} \sum c_k r^k \sin k\varphi = 0.$$

Pradinis K. Gauso įrodymas remiasi tolydumo savybėmis ir labai sudėtingas. A. Novikas pasiūlė būdą, kaip diskretizuoti kintamuosius U ir V ir nagrinėti diskrečiuosius dydžius. Pranešime siūlomas trumpesnis tokio būdo variantas.

Literatūra

- [1] Mačys, J. J. 2022. Pagrindinė algebros teorema. *Liet. matem. rink., Ser. B* 63:47–53.

Būtiniosios ir pakankamosios sąlygos teoremose

Edmundas Mazėtis[†], Grigorij Melničenko[‡]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Vytauto Didžiojo universitetas

Tiek moksleiviui, tiek profesionaliam matematikui uždavus klausimą – kuo skiriasi būtiniosios ir pakankamosios sąlygos, atsakyti dažnai būna sunkoka. Net ir pateikus konkrečių teiginių formuluočių, ne visuomet gaunamas teisingas atsakymas. Tuo tarpu šios dvi sąvokos yra dažnos šiuolaikinėje matematikoje.

Straipsnyje bandoma išnagrinėti būtinąsias ir pakankamąsias sąlygas. Pateiktos išvalgos turėtų būti naudingos tiek mokiniams, tiek mokytojams, tiek visiems besidomintiems matematika, pakelti jų matematinę kultūrą.

Literatūra

- [1] Mazėtis, E., Melničenko, G. 2018. Racionalieji kuboidai ir Herono trikampiai. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B* 59:61–66.
- [2] Mazėtis, E., Melničenko, G. 2019. Racionalieji kuboidai ir Herono trikampiai II. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B* 60:34–38.

Transformacijos ir simetrija mokyklinėje matematikoje

Vytautas Miežys

Elicėjus

Atnaujinus matematikos bendrąją programą mokykliniame matematikos turinyje, geometrijos ir matavimo srityje, atsirado transformacijos sąvoka [1]. Ankstesnėje matematikos bendrojoje programoje [4, 5] ši sąvoka buvo minima tik funkcijos grafiko kontekste. Abiejose programose vartojama simetrijos sąvoka, tačiau ji nėra siejama arba nėra pakankamai siejama su transformacijos sąvoka, nors nemokyklinėje matematikoje simetrijos sąvoką įprastą apibrėžti naudojant transformacijos sąvoką [6, 7]. Tiek pagal ankstesnę programą, tiek pagal dabartinę, simetrijos sąvoka vartojama dvejopai – kartais turima omenyje transformacija (pvz., moksleiviai prašomi pavaizduoti duotą figūrą simetriškai tiesės atžvilgiu), kartais kaip objekto savybė (pvz., moksleiviai prašomi pažymėti duotos figūros simetrijos centrą). Toks dvilypis simetrijos sąvokos vartojimas skiriasi nuo to, kaip simetrija įprastai suprantama nemokyklinėje matematikoje. Be to pagal atnaujintą programą parengti 5 kl. vadovėliai [2, 3] skirtingai pristato medžiagą apie transformacijas ir simetriją – vadovėliuose apibrėžiamos skirtingos sąvokos, vartojami skirtingi terminai. Tokie skirtumai, tikėtina, painioja įvairias matematikos mokymo suinteresuotąsias šalis. Šiuo pranešimu siekiama pasiūlyti aiškia viziją, kaip vartoti transformacijos ir simetrijos sąvokas mokyklinėje matematikoje, jas tarpusavyje susieti ir priartinti prie vėliau vartojamų sąvokų nemokyklinėje matematikoje.

Literatūra

- [1] Emokykla. 2023. *Matematikos bendroji programa*. Prieiga internetu: www.emokykla.lt/bendrosios-programos/visos-bendrosios-programos/5. Žiūrėta 2024-05-09.
- [2] Janušaitienė, O., Ališauskas, A., Daukšytė-Koncevičienė, L. 2023. *Matematika, 5 klasė*, 2 dalis. Šviesa.
- [3] Meškauskaitė, V., Pipirienė, V., Stundžienė, Ž. 2023. *Matematika visiems, 5 klasė*, 2 dalis. TEV.
- [4] ŠMM. 2008. *Matematikos bendroji programa 5-10 kl.* Prieiga internetu: https://duomenys.ugdome.lt/saugykla/bp/2016/pagrindinis/4_Matematika.pdf. Žiūrėta 2024-05-09.
- [5] ŠMM. 2011. *Matematikos bendroji programa 11-12 kl.* Prieiga internetu: https://duomenys.ugdome.lt/saugykla/bp/2016/vidurinis/Matematika_3_priedas.pdf. Žiūrėta 2024-05-09.
- [6] *Visuotinė lietuvių enciklopedija*. 2024. Simetrija. Prieiga internetu: <https://www.vle.lt/straipsnis/simetrija-2/>. Žiūrėta 2024-05-09.
- [7] *Wikipedia*. 2024. Symmetry (geometry). [https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_\(geometry\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetry_(geometry)). Žiūrėta 2024-05-09.

Geometrinės transformacijos mokyklinėje matematikoje

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas

Aptarsime transformacijomis grįstos geometrijos mokyklinėje matematikoje turinio ir mokymo aspektus. Remsimės amerikiečių matematiko Hung-Hsi Wu sukurta šios temos mokymosi trajektorija, apimančia visas klases nuo pirmos iki dvyliktos. Apžvelgsime šios temos pateikimo įvairovę vadovėliuose, lietuvių kalba išleistuose nuo sovietinių laikų iki šių dienų. Taip pat pakomentuosime keletą matematikos mokytojų rezultatus, gautus atlikus užduotis su geometrinėmis transformacijomis.

Matematikos mokytojų rengimo Lietuvoje galimybės ir sunkumai

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas

Pastarąjį dešimtmetį Lietuvoje vyksta pedagogų rengimo modelio atnaujinimas. Šio atnaujinimo inicijuotų reformų ir diskusijų kontekste aptarsime matematikos mokytojų rengimo galimybes ir sunkumus. Problema ta, kad naujausias pedagogų rengimo reglamentas nenumato lygiagretaus mokytojų rengimo būdo universitetinių pirmosios pakopos studijų programoms, vykdomoms ne pedagogikos studijų kryptyje. Poreikį tokiam matematikos mokytojų rengimo būdui argumentuosime remdamiesi tarptautinės mokslininkų bendruomenės rezultatais, gautais tiriant matematikos mokytojų žinias.

Matematikos taikymai

Rinkėjo modelis su periodinių apklausų mechanizmu

Rokas Astrauskas, Aleksejus Kononovičius,
Marijus Radavičius, Feliksas Ivanauskas

Vilniaus universitetas

Atsitiktinių procesų modeliai ir statistinė fizika gali būti panaudoti įvairių socialinių reiškinių tyrimams. Vienas populiariausių tokių modelių yra rinkėjo modelis [1], kurį šiame darbe pritaikome nagrinėdami apklausų įtaką rinkėjų nuomonei.

Šiame tyrime pasiūlėme rinkėjo modelį su periodine delsa, reiškiančia tam tikrais periodais atliekamą apklausą [2]. Turime N agentų (rinkėjų), kurie yra būsenose „0“ arba „1“. Laikysime, kad agentų būsenoje „1“ laiko momentu t yra $X(t)$, tada būsenoje „0“ – $N - X(t)$. Apklausos atliekamos laiko τ intervalais ir apklausų indeksai žymimi k . Kiekvieno periodo pradžioje atliekama nauja apklausa, kurios rezultatas $A_k = X(k\tau)$, t.y. agentų kiekis būsenoje „1“ apklausos atlikimo metu. Tačiau apklausų poveikis yra uždelstas: agentai k -ąją apklausą pamato kito periodo pradžioje, o einamojo periodo metu veikia apklausa A_{k-1} .

Agentai keičia būsenas nepriklausomai su sparta σ_1 į būseną „1“, σ_0 – į „0“, o sekdami daugumos nuomonę, kurią mato iš apklausos duomenų, su sparta h . Darydami prielaidą, kad bet kuriuo momentu būseną gali pakeisti 1 agentas, išreiškiame visos sistemos perėjimo į naują būseną spartas:

$$\lambda_k^+ = (N - X) [\sigma_1 + hA_{k-1}], \quad \lambda_k^- = X [\sigma_0 + h(N - A_{k-1})],$$

kur λ^+ yra perėjimo iš „0“ į „1“ sparta, λ^- – atvirkščiai. Toks modelis simuliuojamas kaip standartinis homogeninis Puasono procesas.

Tyrime pateiktas naujas simuliacijos algoritmas, apjungiantis Gillespie ir Next reakcijos metodus, bei aproksimacinis makroskopinės simuliacijos metodas. Panaudojant simuliacijos duomenis yra analiziškai ištirtos tokio modelio savybės: parametro τ įtaka, rastas stacionarus skirstinys ir jo priklausomybė nuo τ bei kitų parametrų.

Literatūra

- [1] Castellano, C., Fortunato, S., Loreto, V. 2009. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics* 81(2):591.
- [2] Kononovicus, A., Astrauskas, R., Radavičius, M., Ivanauskas, F. 2024. Delayed interactions in the noisy voter model through the periodic polling mechanism. *arXiv:2403.10277*.

Reto ir klasterizuoto tinklo Markovo grandinė

Mindaugas Bloznelis, Dominykas Marma

Vilniaus universitetas

Socialinį n aktorių tinklą yra patogų vaizduoti grafu $G = (V, E)$, kurio viršūnių aibės $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ elementai yra tinklo aktoriai, o briaunų aibės E elementai $\{u, v\}$ atitinka kaiminystės/draugystės ryšius tarp aktorių: rašome $\{u, v\} \in E$, jei aktoriai $u, v \in V$ yra kaimynai/draugai. Norėdami pavaizduoti tinklo kitimą, kai laikui t bėgant ryšiai nutrūksta ir vėl atsiranda, naudojame atsitiktinį procesą $\{G_t = (V, E_t), t \geq 0\}$. Čia laikome, kad viršūnių aibė yra ta pati, o kinta tik briaunų aibė $t \rightarrow E_t$.

Darbe [1] buvo nagrinėta diskretaus laiko Markovo grandinė $\{G_0, G_1, G_2, \dots\}$, kurios perėjimų matrica suteikia (apytikriai) $k = 2, 3, \dots$ kartų didesnius šansus atsirasti naujai briaunai, uždarančiai k trikampių, palyginus su tikimybe atsirasti briaunai, uždarančiai tik vieną trikampį (briaunų trynimo tikimybės vienodos).

Darbe [2] modelis buvo praturtintas nauja savybe: briaunos trynimo tikimybė neigiamai koreliuoja su trikampių skaičiumi, kuriai briauna priklauso. Taigi kuo didesnę trikampių skaičių šalinama briauna išardytų, tuo mažesni šansai ją ištrinti. Be to, [2] darbe (žr. taip pat [3]) buvo nagrinėjama tolydaus laiko Markovo grandinė: viršūnių poroms priskirti nepriklausomi eksponentiniai atsitiktiniai dydžiai („laikrodžiai“), kurių intensyvumus apibrėžia kiekvienos poros bendrų kaimynų skaičius tinkle. „Laikrodžiui suskambėjus“ pora keičia savo būseną (porą jungianti briauna trinama, o jei tokios briaunos nėra - ji atsiranda).

Minėti modeliai [1,2] turi bendrą trūkumą: briaunų tankis yra arba nestabilus (stebimos didelės fluktuacijos), arba priartėja prie pilnojo grafo briaunų tankio. Įdomus ir svarbus uždavinys yra išsiaiškinti, ar galima modifikuoti modelio parametrus (tikimybių perėjimo matricą / eksponentinių dydžių intensyvumų rinkinius) taip, kad stacionarusis Markovo grandinės skirstinys atitiktų tinklą su stabilium netrivialiu briaunų tankiu (ženkliai mažesniu už pilnojo grafo briaunų tankį). Parnešime pateiksime metodiką, kaip parinkti parametrus tinklams su mažu briaunų tankiu ir netrivialiomis klasterizacijos savybėmis (lokalusis ir globalusis tinklo klasterizacijos koeficientai keliomis eilėmis didesni už briaunų tankį) generuoti. Taip pat pateiksime matematinius argumentus, patvirtinančius tinklo kompiuterinio modeliavimo rezultatus.

Literatūra

- [1] Grindrod, P., Higham, D. J., Parsons, M. C. 2012. Bistability through triadic closure. *Internet Math.* 8(4):402–423.
- [2] Užupytė, R., Wit, E. C. 2020. Test for triadic closure and triadic protection in temporal relational event data. *Social Network Analysis and Mining* 10:21.
- [3] Zhang, X., Moore, C., Newman, M. E. J. 2017. Random graph models for dynamic networks. *Eur. Phys. J. B* 90:200.

Mokymosi kreivių teorija ir taikymai

Vytautas Kleiza[†], Justinas Tilindis[‡]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] AQ Wiring Systems, UAB

Pateikta ir pagrįsta mokymosi kreivių teorija naudojant užmiršimo sąvoką ir pateikti konkretūs taikymai gamyboje.

Likusios naudingos darbo trukmės vertinimas naudojant daugiamačių duomenų vizualizavimo metodus

Rūta Leonaitė, Mantas Landauskas

Kauno technologijos universitetas

Dėl nuolatinio dėvėjimosi, mechaninės sistemos galiausiai gali sugesti. To norima išvengti dėl daugelio priežasčių: sklاندus paslaugų teikimo ar gamybinio proceso veikimui, saugiam įrengimų darbui. Todėl įvairių besisukančių mechanizmų diagnostika ir ankstyvas ar tiesiog nuspėjantis gedimų aptikimas yra svarbus. Tačiau teoriniai prognostikos modeliai ne visada yra lengvai pritaikomi praktikoje [2]. O tai stiprina panašių tyrimų aktualumą. Šio darbo tikslas yra išnagrinėti daugiamačius orlaivių variklių duomenis ir juos vizualizuoti taip, kad iš vizualizacijų kitimo laike būtų galima įvertinti mechanizmo likusios naudingos darbo trukmės (RUL) vertę.

Tyrimo naudojami daugiamačiai lėktuvų variklių duomenys. Kiekviena laiko eilutė periodo pabaigoje atitinka situaciją, kai užfiksuojamas variklio gedimas. Taip variklio būseną yra nusakoma RUL. Likusi naudinga darbo trukmė dažnai naudojama mechaninės sistemos būklei apibūdinti, o jos sumažėjimas siejamas su atsirandančiu gedimu, dėl kurio sistema veiks netinkamai arba apskritai nustos funkcionuoti. Darbe siekiama išanalizuoti RUL sumažėjimą vertinant skaitmeninius vaizdus, gautus daugiamačių duomenų vizualizavimo metodais.

Iš daugiamačių duomenų vizualizavimo metodų šiame darbe pasitelkiami klasikiniai (RadViz, t-SNE, principinių komponentų analizė). Kaip pradinis duomenų apdorojimas, atliekama atraktoriaus rekonstrukcija fazinėje plokštumoje, optimizuojant laiko vėlinimų vektorius. Siekiama vizualiai išskirti gerai veikiančio bei gendančio variklio duomenis. Tai iš principo kitoks požiūris nei, pvz., mašininis mokymu grįstos metodikos, tokios kaip [1].

Darbe ištirta, kaip vizualizacijos kinta laike. Įvertinta ir palyginta vizualizacijų evoliucija pradinėje ir rekonstruotoje erdvėje RadViz, t-SNE, principinių komponentų analizės metodams, skaičiuojant vidutinę kvadratinę paklaidą, kaip skaitmeninio vaizdo pokyčio įvertį, laike kintantiems vaizdams. Pastebėta, kad minėtas pradinis duomenų apdorojimas gali RUL vertinimo metodiką padaryti jautresnę.

Literatūra

- [1] Peng, C., Chen, Y., Chen, Q., Tang, Z., Li, L., Gui, W. 2021. A remaining useful life prognosis of turbofan engine using temporal and spatial feature fusion. *Sensors* 21(2):418.
- [2] Sikorska, J. Z., Hodkiewicz, M., Ma, L. 2011. Prognostic modelling options for remaining useful life estimation by industry. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25(5):1803–1836.

Kaip trupmeninės eilės išvestinė keičia Chirikov standartinio modelio kompleksiskumą?

Ugnė Orinaitė, Inga Telksnienė, Tadas Telksnys, Minvydas Ragulskis

Kauno technologijos universitetas

Šiame darbe tiriama Chirikov trupmeninio modelio dinamika [2]. Pagrindinis keliamas klausimas yra apie tai, kaip ir kiek trupmeninės eilės išvestinės keičia šio modelio kompleksiskumą. Prieš atsakinėjant į šį klausimą, yra konstruojama nauja kompleksiskumo matavimo metrika, leidžianti kiekybiškai įvertinti chaotinių procesų sudėtingumą ir tiriamos sistemos kompleksiskumą. Individualios trajektorijos kompleksiskumui vertinti naudojami H-rangai, o jautrumui pradinėms sąlygoms vertinti naudojamas Wada indeksas. Darbe aprašomas tyrimas remiasi ankstesniais rezultatais, įskaitant Ortiz (2020) [3] pastebėjimus apie dalinio slopinimo poveikį chaosui, bei Danca (2021) [1] atraktorių koegzistenciją trupmeniniuose žemėlapiuose. Tyrimo metodai apima trupmeninės eilės išvestinių analizę, taip pat H-rangų ir Wada indekso adaptavimą sprendžiamo uždavinio problematikai. Pagrindiniai rezultatai parodo naujos sudėtingumo metrikos svarbą tyrinėjant trupmeninio žemėlapijo elgseną. Šio tyrimo rezultatai gali turėti įvairių taikymo galimybių netiesinėms sistemoms ir taip pat praplečia supratimą apie chaotiškų sistemų dinamiką. Tyrime pateikiamas naujas požiūris į Chirikov trupmeninio modelio dinamiką ir įvedamas naujas kompleksiskumo matas, leidžiantis išvelgti įdomius pokyčius modelyje.

Literatūra

- [1] Danca, M., Fečkan, M., Kuznetsov, N., Chen, G. Coupled Discrete Fractional-Order Logistic Maps. *Mathematics* 9(18):2204.
- [2] Edelman, M. 2011. Fractional Standard Map: Riemann–Liouville Vs. Caputo. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16(12):4573–4580.
- [3] Ortiz, A., Yang, J., Coccolo, M., Seoane, J. M., Sanjuán, M. A. F. 2020. Fractional Damping Enhances Chaos in the Nonlinear Helmholtz Oscillator. *Nonlinear Dynamics* 102(4):2323–2337.

Wada indeksas ir jo taikymas steganografijoje

Loreta Saunorienė, Minvydas Ragulskis

Kauno technologijos universitetas

Wada sritis sudaro trys ar daugiau nejungios aibės, turinčios bendrą ribą [3]. Tiriant netiesines dinamines sistemas, sistemos atraktorius fazinėje plokštumoje yra įprasta vaizduoti spalvų žemėlapiais, kuriuose skirtingos spalvos žymi skirtingas sistemos būsenas, pasiekiamas iš atitinkamų pradinų sąlygų taškų. Netiesinių dinaminų sistemų reakciją į sąlyginai mažus pradinų sąlygų pokyčius galima įvertinti remiantis Wada indeksu, paskaičiuojamu iš fazinės plokštumos žemėlapių [2]:

$$\omega^{(s)}(p_1, p_2, \dots, p_m) = \frac{m}{\log(m)} \mathbf{1}_3^{(s)} e^{(s)},$$

čia s yra stebėjimo lango dydis; m – skirtingų spalvų skaičius; p_k – k -osios spalvos pasirodymo tikimybė stebėjimo lange ($k = 1, 2, \dots, m$); $\mathbf{1}_3^{(s)}$ – bent trijų spalvų pasirodymo stebėjimo lange indikatorius; $e^{(s)}$ – Šenono entropija. Įdomu tai, kad Wada indekso, apskaičiuoto bet kokiam skaitmeniniam vaizdui, reikšmė leidžia įvertinti ne tik skirtingų spalvų skaičių tame vaizde, bet ir spalvų pasiskirstymo tolygumą [2].

Remiantis Wada indeksu, buvo sukurta vaizdo padengimo slenkančiais stebėjimo langais schema, kurios pagalba nespaltotas skaitmeninis vaizdas yra išskaidomas į s^2 juodai baltų plokštumų, talpinančių informaciją apie pradinį vaizdą [1]. Šios plokštumos parodo, kuriuose stebėjimo languose yra tam tikras fiksuotas skirtingų spalvų skaičius. Toks vaizdo padengimas, su kuriuo kiekviename stebėjimo lange nuosekliai atliekamos korekcijos nekeičia spalvų skaičiaus prieš tai esančiuose stebėjimo languose, vadinamas tobulu padengimu [1]. Tobulo vaizdo padengimo slenkančiais langais koncepcija leidžia bet kokiam nespaltotame skaitmeniniame vaizde paslėpti pasirinktą informaciją (pvz., juodai baltą vaizdą ar tekstą). Įdomu tai, kad ši steganografinė schema yra atspari tiek bitų plokštumų analizei, tiek ir RS analizei, o slepiamos informacijos talpa prilygsta LSB steganografinės schemos talpai [1].

Literatūra

- [1] Saunorienė, L., Ragulskis, M. 2023. A steganographic scheme based on the Wada index. *Multimedia Tools and Applications*, 82:1-27.
- [2] Saunorienė, L., Ragulskis, M., Cao, J., Sanjuan, M. A. F. 2021. Wada index based on the weighted and truncated Shannon entropy. *Nonlinear Dynamics* 104:739-751.
- [3] Yoneyama, K. 1917. Theory of continuous set of points (not finished). *Tohoku Math. J., First Series* 12:43–158.

Daugiakriterinių sprendimo priėmimo metodų tyrimas, atsižvelgiant į rodiklių normalizavimą neraiškiųjų skaičių atveju

Rūta Simanavičienė, Aurelija Kasparavičiūtė, Diana Kalibatiene
Vilnius TECH

Daugiakriteriniai sprendimo priėmimo (angl. Multiple criteria decision making – MCDM) metodai yra plačiai taikomi socialinių, technologijos, medicinos ir kitų mokslo sričių tyrimuose, kai nagrinėjamos alternatyvos, vertinamos atžvilgiu daugelio rodiklių, siekiant sudaryti alternatyvų prioritetinę eilutę [1]–[3]. Pasitaiko sprendimo priėmimo uždavinių, kuriuose rodiklių reikšmės negali būti įvertintos viena skaitine reikšme. Tokiu atveju rekomenduojama taikyti MCDM metodus, kuriuose rodiklių reikšmės apibrėžiamos neraiškiais skaičiais, tokius kaip: fuzzy TOPSIS, fuzzy SWARA, fuzzy WASPAS ir pan. Daugumoje MCDM metodų, rodiklių reikšmių pertvarkymui į bedimensius dydžius, taikoma tam tikra normalizacijos taisyklė. Nagrinėtoje literatūroje yra darbų, kuriuose tam pačiam MCDM metodui taikomos skirtingos normalizavimo taisyklės [6], [4], yra tyrimų, kuriuose nagrinėjama normalizavimo taisyklių įtaka alternatyvų rangavimui [5], [7], tačiau normalizavimo taisyklių įtaką alternatyvų rangavimui, taikant fuzzy MCDM metodus, nebuvo tyrinėta. Šio tyrimo – tikslas atlikti keleto fuzzy MCDM metodų analizę, taikant skirtingas normalizavimo taisykles pasirinktuose metoduose. Atliktas tyrimas parodė, jog normalizavimo taisyklės, kurių pagrindas – tiesinė monotoninė transformacija, silpnai įtakoja alternatyvų rangavimą, tačiau netiesinių transformacijų atveju alternatyvų rangavimas įtakojamas žymiai stipriau.

Literatūra

- [1] Al Mohamed, A. A., Al Mohamed, S., Zino, M. 2023. Application of fuzzy multicriteria decision-making model in selecting pandemic hospital site. *Futur. Bus. J.* 9:14.
- [2] Alireza, S.-A. 2022 The applications of MCDM methods in COVID-19 pandemic: A state of the art review. *Applied Soft Computing* 126:109238.
- [3] Baydaş, M., Yilmaz, M., Jovič, Ž. et al. 2024. A comprehensive MCDM assessment for economic data: success analysis of maximum normalization, CODAS, and fuzzy approaches. *Financ. Innov.* 10:105.
- [4] Celen, A. 2014. Comparative analysis of normalization procedures in TOPSIS method: Wit an application to Turkish deposit banking market. *Informatica* 25(2):185–208.
- [5] Simanavičienė, R., Jakučionytė, V., Deltuvienė, D. 2022. Sensitivity study of TOPSIS and COPRAS methods with respect to normalization techniques. *Baltic journal of modern computing.* 10(2):105–120.
- [6] Vafaei, N., Ribeiro, R. A., Camarinha-Matos L. M. 2016. Normalization techniques for multi-criteria decision making: analytical hierarchy process case study. In: *Doctoral conference on computing, electrical and industrial systems.* pp. 261–269.

- [7] Wen, Z., Liao, H., Zavadskas, E. K. 2020. MACONT: Mixed aggregation by comprehensive normalization technique for multi-criteria analysis. *Informatica* 31(4):857–880.

Žinių grafų bei grafų branduolių panaudojimas dezinformacijos aptikimui

Milita Songailaitė, Justina Mandravickaitė, Tomas Krilavičius

Vytauto Didžiojo universitetas

Atliekant socialinių medijų bei tradicinės žiniasklaidos stebėseną dažnai tenka susidurti su dideliu nestruktūrizuotų duomenų kiekiu. Tokiais atvejais dažnai praverčia metodai, leidžiantys išskirti tik svarbiausias informacijos dalis, taip sumažinant jos kiekį ir pateikiant tvarkingomis duomenų struktūromis. Šio tyrimo metu buvo išbandytas tokio tipo metodas, paremtas žinių grafu (angl. *knowledge graphs*). Naudojantis žinių grafais, kurie buvo sudaryti išskyrus SVO (angl. *Subject-Verb-Object*) tripletus, buvo tiriamos dezinformacijos apraiškos žinių bei susirašinėjimo platformoje *Telegram*. Dezinformacijos buvo ieškoma apskaičiuojant skirtingus grafų branduolius tarp žinių grafų, sudarytų iš surinktų *Telegram* žinučių, ir grafų, sudarytų iš jau patvirtintų dezinformacijos atvejų, publikuotų *EUvsDisinfo* duomenų bazėje. Šis metodas buvo pritaikytas analizuojant daugiau nei 1 milijoną žinučių iš 30 ekspertiniu būdu atrinktų rusiškų ir baltarusiškų *Telegram* kanalų, kuriuos, kaip parodė pirminė analizė, seka ir Lietuvos piliečiai bei kuriuose neretai pasitaiko dezinformacijos apraiškų. Dezinformacijos atvejai buvo specifiškai atrinkti tik tie, kuriuose dezinformacija buvo susijusi su vykstančiu Rusijos bei Ukrainos karu. Analizės rezultatai parodė, kad visuose analizuojamuose kanaluose pasirodė tam tikras kiekis dezinformacijos, tačiau dauguma kanalų ypač akcentavo dezinformaciją, susijusią su biologiniais ir branduoliniais ginklais bei okupuotų teritorijų gyventojų pažiūromis. Analizuojant metodus pasirodė, kad geriausias grafų branduolio sudarymo būdas dezinformacijos aptikimui buvo trumpiausio kelio branduolys. Šis metodas, kitaip, nei kiti, iš didelio grafų kiekio leido išskirti būtent labiausiai dezinformacija pasižyminčius grafus, kurių aptikimas ir buvo svarbiausias šio tyrimo uždavinys.

Caputo trupmeninio logistinio žemėlapio laikino stabilizavimo schema

Tadas Telksnys

Kauno technologijos universitetas

Procesų, pasižyminčių chaotine dinamika, valdymas jau yra tapęs klasikiniu uždaviniu ir yra dažnai nagrinėjamas tiek tolydaus, tiek diskretaus laiko sistemoms. Šiame pranešime pristatysime gerai žinomo ir ištirtineto – logistinio žemėlapio išplėtimą panaudojant Caputo trupmeninės eilės išplėtimą. Pagrindinė trupmeninių procesų savybė – atminties efektas, kuomet dabartinis vaizdavimo elementas priklauso ne tik nuo vieno praeito elemento, o nuo visų iki pat pirmojo elemento, taikant eksponentiškai gėstančius svorius. Šis efektas iš esmės pakeičia logistinio žemėlapio evoliuciją ir įveda daug naujų savybių: jeigu netrupmeninį logistinį žemėlapi vienu baigtiniu impulsu galima stabilizuoti, išlaikant jį nestabilioje periodo-1 orbitoje neribotą laiką [1], tai trupmeniniu atveju galimas tik laikinas stabilizavimas. Šie rezultatai išvedami ir pagrindžiami naudojantis H-rangų koncepcija, leidžiančia įvertinti skirtingų žemėlapio trajektorijų kompleksiskumą.

Literatūra

- [1] Landauskas, M., Ragulskis, M. 2012. Clocking convergence to a stable limit cycle of a periodically driven nonlinear pendulum. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 22:033138.

Statistika ir jos taikymai

Supervised Classification of Area-Temporal Data via HMMs with Continuous Non-Gaussian Observations

Kęstutis Dučinskas, Marta Karaliūtė

Klaipėda University

In this paper, we provide details for the implementation of HMM models for spatial classification in a supervised learning context. We develop the generative approach to supervised binary classification of the area-temporal (AT) data based on spatial weighting of parameters of the discrete time Hidden Markov models (HMMs) with continuous feature observations.

The objective of this study is to extend the previous investigations relied on HMMs with Gaussian observations [3], [4], [5] to the HMMs with continuous observations relying on the exponential family of distributions. The original estimation strategy based on spatial weighting of the HMM parameter estimators at separate areal unit (AU) is introduced. Two types of transition probability estimators are also included in the consideration. Motivated by the desire to investigate distributions with different support sets, we focus on the parsimonious Gamma and Beta regression models [1], [2]. Performances of the proposed classifiers are evaluated for the simulated and real data by the Average accuracy and Balanced accuracy rates derived from spatially aggregated confusion tables.

Critical comparison of the performance of Bayesian one-step ahead classifiers for two types of observations models relied on Gamma and Beta emission distributions and several strategies for HMM parameter estimation and several link functions for means is carried out. In view of these results and simplicity of computing the estimates, we suggest that the proposed approach be considered as a reasonable option for the classification of AT data based on generative machine learning models.

References

- [1] Corrales-Bossio, M., Cepera-Cuervo, E. 2015. Gamma regression models with the Gammareg R package. *Comunicaciones en Estadística* 8(2):211–223.
- [2] Cribari-Neto, F., Zeileis, A. 2010. Beta regression in R. *Journal of Statistical Software* 34(2):1–24.
- [3] Dučinskas, K., Karaliūtė, M., Šaltytė-Vaisiauskė, L. 2023. Spatially Weighted Bayesian Classification of Spatio-Temporal Areal Data Based on Gaussian-Hidden Markov Models. *Mathematics* 11(2):347.
- [4] Karaliūtė, M. 2023. *Supervised Bayesian classification methods of Gaussian Spatio-temporal data based on generative machine learning models*, Doctoral dissertation, Vilniaus universitetas.
- [5] Nguyen, L. 2016. Continuous Observation Hidden Markov Model. *Revista KAMERA* 44(6):65–149.

Functional Data Analysis of Near-Infrared Spectroscopy (NIRS) Signals in Small Data Samples

Miglė Gervytė, Tadas Žvirblis

Vilnius University

In this study, we aim to analyze near-infrared spectroscopy (NIRS) signals from a limited dataset of 21 preterm infants to forecast patent ductus arteriosus (PDA) status. Preterm neonates frequently present with PDA, leading to declining regional tissue oxygen saturation (rSpO₂) levels detectable via NIRS. We plan to employ Functional Data Analysis (FDA) to model and classify rhythmic patterns in rSpO₂ signals. The Frequency Modulated Möbius (FMM) model will be used to describe these rhythmic patterns, capturing key oscillatory features such as amplitude, phase, and frequency. Given the small sample size, we will carefully explore patterns and variations in rSpO₂ signals to identify meaningful trends and differences between infants with and without PDA. These features will be used to train classification models to accurately predict PDA status. We hypothesize that FDA, combined with machine learning classifiers, will help identify useful patterns and provide a novel approach to predicting PDA status in preterm infants.

References

- [1] Rueda, C., Larriba, Y., Peddada, S. D. 2019. Frequency modulated Möbius model accurately predicts rhythmic signals in biological and physical sciences. *Scientific Reports* 9:18701.
- [2] Ullah, S, Finch, C. F. 2013. Applications of functional data analysis: A systematic review. *BMC Medical Research Methodology* 13:43.

ES ir EEE šalių tarptautinio skaitymo gebėjimų tyrimo PIRLS mokinių pasiekimų atotrūkio įvertinimas ir analizė 2001–2021

Audronė Jakaitienė[†], Laura Ringienė[†], Rita Dukynaitė[‡], Rimantas Želvys[†]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Švietimo, mokslo ir sporto ministerija

Tarptautinio skaitymo gebėjimų tyrimo (angl. Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS) duomenų longitudiniame tyrime nagrinėjame ketvirtos klasės mokinių skaitymo pasiekimų atotrūkius ES ir EEE šalyse. Pasiekimų atotrūkis (angl. achievement gap) yra sisteminis tam tikrų mokinių grupių skirtumas akademinio pasiekimų srityse, tokiose kaip testavimo rezultatai, mokinių pasiekimų tyrimai, išsilavinimo lygis, arba kitoje vertinamojoje srityje. Šis atotrūkis pasireiškia tarp skirtingų socialinio, ekonominio, kultūrinio konteksto, gali būti sukeltas įvairių veiksnių, įskaitant išteklių trūkumą, mokytojų lūkesčių skirtumus, šeimos paramą. Pasiekimų atotrūkio klausimas nagrinėjamas siekiant identifikuoti ir spręsti šiuos skirtumus, užtikrinti visų mokinių galimybes gauti kokybišką švietimą ir pasiekti akademinis bei asmeninius tikslus.

Tyrime analizavome mokinių pasiekimų duomenis PIRLS tyrime nuo 2001 iki 2021 m., kur dalyvavo 28 ES ir EEE šalys. Analizė apima 12 šalių, kurios dalyvavo visuose penkiuose cikluose nagrinėjamu periodu. PIRLS vertina mokinių grožinių ir informacinių tekstų skaitymo pasiekimus, kurie matuojami penkiais tikėtiniais įverčiais. Skaitymo pasiekimų minimali ir maksimali reikšmės apskaičiuojamos kiekvienam tikėtinam įverčiui, o tada apskaičiuojami vidurkiai [1]. Gautų reikšmių skirtumas yra pasiekimų atotrūkis.

Visų šalių skaitymo pasiekimų maksimumas nuo 2001 iki 2021 metų pastoviai mažėjo (836–809 taškai), o minimumas svyravo (2011 metų cikle pasiekta aukščiausia 212 taškų riba, 2021 metų cikle pasiekta žemiausia 166 taškų riba). Atskirų šalių apskaičiuotas pasiekimų atotrūkis per laiką yra įvairių formų: W, U, V ir pan. 58,3 proc. pasiekimų atotrūkių visose šalyse didėjo, iš kurių 35,7 proc. dėl mokinių aukštesnių pasiekimų. Atitinkamai 41,7 proc. pasiekimų atotrūkių sumažėjo, iš kurių 40 proc. dėl pasiektų aukštesnių minimalių pasiekimų. Apskaičiuota, kad vidutiniai aukštesni pasiekimai ES šalyse nekoreliuoja su pasiekimų atotrūkiu. Atliktas tyrimas atskleidė, kad paskutiniuose cikluose mokinių pasiekimų atotrūkio padidėjimui įtakos galėjo turėti perėjimas prie elektroninių užduočių.

Literatūra

- [1] Fishbein, B., Yin, L., Foy, P. 2023. *PIRLS 2021 User Guide for International Database*. Boston College: TIMSS & PIRLS International Study Center.
- [2] Reardon, S. F. 2013. The widening academic achievement gap between the rich and the poor: New evidence and possible explanations. In: *Whether opportunity? Rising inequality, schools, and children's life chances*, G. J. Duncan & R. J. Murnane (Eds.). Russell Sage Foundation. pp. 91–116.

Adityvių funkcijų lyginamoji analizė sezoninių laiko eilučių dekompozijai

Gintarė Klimantavičiūtė, Jurgita Markevičiūtė

Vilniaus universitetas

Laiko eilučių dekompozija yra plačiai taikomas metodas energetikos, ekonomikos, medicinos ir kituose sektoriuose siekiant teisingai prognozuoti kintamojo reikšmę bėgant laikui. Šiame darbe buvo nagrinėjamos adityvios funkcijos laiko eilučių nusezoninimui: STL (*angl.* Seasonal-Trend Decomposition Based on Loess)(žr. [2]), MSTL (*angl.* Seasonal Trend Decomposition Algorithm for Time Series with Multiple Seasonal Patterns)(žr. [1]), Prophet (žr. [4]), STR (*angl.* Seasonal-Trend Decomposition Using Regression) (žr. [3]), MA (*angl.* moving average). Šie metodai buvo palyginami naudojant sumodeliuotus duomenis bei *litgrid.eu* valandinius elektros suvartojimo duomenis Lietuvoje 2018-2023 metais. Metodų efektyvumo rodikliai buvo vertinami remiantis vidutine absoliučiąja paklaida (*angl.* Mean Absolute Error MAE), koreliacijos koeficientu ir Shapiro-Wilk testu. Rezultatai suteikia tyrėjams rekomendacijas, kurių statistinį metodą naudoti esant skirtingoms sumodeliuotoms funkcinių laiko eilučių situacijoms, bei parodo, kuris kriterijus iš nagrinėtų leidžia geriausiai prognozuoti elektros suvartojimą Lietuvoje.

Literatūra

- [1] Bandara, K., Hyndman, R. J., Bergmeir, C. 2021. MSTL: A seasonal-trend decomposition algorithm for time series with multiple seasonal patterns. *arXivF:2107.13462*.
- [2] Cleveland, R. B., et al. 1990. STL: A seasonal-trend decomposition. *J. Off. Stat.* 6(1):3–73.
- [3] Dokumentov, A., Hyndman, R. J. 2022. STR: Seasonal-trend decomposition using regression. *INFORMS Journal on Data Science* 1(1):50–62.
- [4] Taylor, S.J., Letham, B. 2018. Forecasting at scale. *The American Statistician* 72(1):37–45.

Homogeniškumo testų priklausomoms cenzūruotoms imtims lyginamoji analizė

Justina Levickytė, Rūta Levulienė

Vilniaus universitetas

Išgyvenamumo analizės metodai taikomi įvairiose srityse, tiriant laiką iki dominančio įvykio. Darbe atliktas homogeniškumo testų priklausomoms cenzūruotoms imtims palyginimas naudojant statistinį modeliavimą. Priklausomų imčių modeliavimui buvo pasitelktos kopulos, modeliavimas atliktas esant įvairiam imties dydžiui ir cenzūravimo lygiui. Išvados suteikia rekomendacijas tyrėjams, kuriuos testus ir esant kokioms sąlygoms naudoti. Taip pat buvo atlikta realių duomenų analizė, iliustruojanti kriterijų naudojimą.

Populiacijos parametru vertinimas iš netikimybinės imties įtraukiant papildomą informaciją iš tikimybinės imties

Vilma Nekrašaitė-Liegė^{†,‡}

[†] Vilnius TECH

[‡] Valstybės duomenų agentūra

Oficialioje statistikoje, kai vertinami populiacijos parametrai naudojant imčių metodus, tyrimo kintamojo reikšmės dažniausiai yra žinomos tikimybinėje imtyje, o kiti šaltiniai, tokie kaip administraciniai ar privatūs, paprastai naudojami kaip papildoma informacija. Tačiau vis dažniau susiduriama su situacijomis, kai tyrimo kintamojo reikšmės yra žinomos ne tikimybinėje, bet netikimybinėje imtyje. Netikimybinėse imtyse nėra žinomos priklausymo imčiai tikimybės, todėl oficialioje statistikoje populiacijos parametro vertinimas iš netikimybinės nėra taikomas, kadangi ilgą laiką nebuvo galimybės įvertinti jo tikslumo.

Vis dėlto netikimybinės imtys turi tam tikrų pranašumų: jos yra ekonomiškesnės, greičiau surenkamos ir dažnai didesnės apimties. Todėl pastaraisiais metais vis daugiau dėmesio skiriama tyrimams, kuriuose yra tiriamos galimybės vertinti populiacijos parametrus iš netikimybinių imčių. Dažniausiai tai atvejai, kai toje pačioje baigtinėje populiacijoje turima ir tikimybinė imtis. Tokiose situacijose svarbu žinoti, ar tyrimo kintamojo reikšmės yra žinomos netikimybinėje imtyje, tikimybinėje imtyje ar abiejose. Tai lemia įvertinio pasirinkimą (J.-F. Beaumont (2020), J. N. K. Rao (2021), S. Yang, J.K. Kim (2020)).

Šiame tyrime tyrimo kintamojo reikšmės yra žinomos, t.y. prognozuojamos, netikimybinėje imtyje, kuri sukonstruota taip, kad ne visi populiacijoje esantys elementai gali pakliūti į imtį, o tik turintys tam tikrą požymį. Papildomai yra stebima tikimybinė imtis, išrinkta iš visos populiacijos. Siekiama įvertinti populiacijos parametro reikšmę. Tokia situacija literatūroje dar nėra nagrinėta.

Literatūra

- [1] Beaumont, J.-F. 2020. Are probability surveys bound to disappear for the production of official statistics? *Surv. Methodol.* 46(1):1–28.
- [2] Rao, J. N. K. 2021. On making valid inferences by integrating data from surveys and other sources. *Sankhya B* 83(1):242–272.
- [3] Yang, S., Kim, J. K. 2020. Statistical data integration in survey sampling: A review. *Jpn. J. Stat. Data Sci.* 3:625–650.

Skirtingų mašininio mokymosi metodų taikymas klasifikavimui

Renata Paukštaitienė, Vita Špečkauskienė

Lietuvos sveikatos mokslų universitetas

Mašininio mokymosi metodų taikymas leidžia spręsti prognozavimo ir klasifikavimo uždavinius bei priimti sprendimus atliekant duomenų analizę be tyrėjo išankstinių nuostatų, todėl labai svarbu pasirinkti tinkamiausią metodą, o metodų rezultatus įvertinti vienodomis bei informatyviomis metrikomis. Šio tyrimo tikslas – klasifikavimui skirtų mašininio mokymosi ir logistinės regresijos metu gautų klasifikavimo rezultatų palyginimas. Tyrimo duomenys – atvirieji 2019 m. atlikto „Gyventojų sveikatos statistinio tyrimo“ duomenys, atsisiųsti iš Lietuvos atvirų duomenų portalo (<https://data.gov.lt>). Analizuoti tik suaugusių žmonių ($n = 4760$) duomenys: savo sveikatos vertinimas (gera / prasčiau nei gera), išsilavinimas (vidurinis arba žemesnis / profesinis / aukštasis), užimtumas (dirbantis / nedirbantis), jų jaučiamo kūno skausmo intensyvumas (nejaučiamas / silpnas / vidutinis / stiprus), kūno masės pagal kūno masės indeksą (KMI) ($KMI < 25$ / $KMI 25-30$ / $KMI \geq 30$), amžiaus grupė (< 24 m. / $25-44$ m. / $45-64$ m. / ≥ 65 m.), sergamumas lėtine liga (taip / ne), biologinė lytis, rūkymas, alkoholio vartojimas (visai nevartoja / rečiau nei kartą per mėnesį / kartą per mėnesį arba dažniau). Duomenys analizuoti naudojant IBM SPSS Statistics 29 statistinės analizės programinį paketą. Taikyti metodai (dvinarės logistinės regresijos (žingsninės, šalinamosios su didžiausio tikėtumo funkcija – angl. *Backward LR*) metodas, vieno sluoksnio neuroninis tinklas, naivus Bajeso (angl. *Naive Bayes*) klasifikatorius bei sprendimų medžių metodas) pagal į modelį įtrauktus kintamuosius turėjo tiriamuosius sugrupuoti į dvi sveikatos vertinimo grupes. Metodų klasifikavimo rezultatų tikslumas vertintas teisingu kiekvienos kategorijos klasifikavimo procentu, taip pat jautrumo (J, proc.) ir specifiškumo (Sp, proc.) įverčiais bei jų 95 proc. pasikliautinaisiais intervalais (PI). Rezultatai. Dvinarės logistinės regresijos metodu modelyje paliko tik statistiškai reikšmingus kintamuosius (pašalino *Rūkymą* ir *Lytį*), kurie buvo naudojami ir taikant kitus metodus. Metodas teisingai suklasifikavo 83,1 proc. prasčiau nei gerai ir 81,5 proc. gerai savo sveikatą vertinančių žmonių. Modelio J = 83,02 (PI: 81,36 – 84,56) proc.; Sp = 84,58 (PI: 83,12 – 85,93). Vieno sluoksnio neuroninis tinklas teisingai suklasifikavo 84,6 proc. prasčiau nei gerai ir 83,0 proc. gerai savo sveikatą vertinančių žmonių. Modelio J = 81,49 (PI: 78,31 – 84,3); Sp = 83,12 (PI: 80,35 – 85,57). Metodas taip pat surangavo kintamuosius pagal jų svarbumą klasifikavimui (išvardinta svarbumo mažėjimo tvarka): amžiaus grupė, skausmas, lėtinės ligos, išsilavinimas, KMI grupė, užimtumas ir alkoholio vartojimas. Bajeso metodas teisingai suklasifikavo 82,3 proc. prasčiau nei gerai ir 85,0 proc. gerai savo sveikatą vertinančių žmonių. Modelio J = 84,97 (PI: 83,38 – 86,42) ir Sp = 82,31 (PI: 80,78 – 83,74). Sprendimų medžių metodas teisingai suklasifikavo 86,5 proc. prasčiau nei gerai ir 80,5 proc. gerai savo sveikatą vertinančių žmonių. Modelio J = 83,20 (PI: 81,53 – 84,76); Sp = 84,22 (PI: 82,77 – 85,57). Tiek naiviojo Bajeso, tiek sprendimo medžio metodas taip pat kaip ir logistinės regresijos metodas klasifikavimui neįtraukė kintamųjų *Lytis* ir *Rūkymas*. Išvada. Apibendrinant rezultatus galima teigti,

kad nors gauti kiek didesni logistinės regresijos bei sprendimų medžio metodo rezultatų jautrumo ir specifiškumo įverčiai, tačiau remiantis pasikliautinaisiais intervalais galima teigti, kad statistiškai reikšmingo skirtumo tarp klasifikavimo į dvi grupes rezultatų, taikant visus taikytus metodus, nenustatyta.

Universalios ir asimptotiškai tikslios nelygybės binominio atsitiktinio dydžio nuokrypių tikimybėms

Marijus Radavičius

Vilniaus universitetas

Tegu $X_{n,p} \sim \text{Binomial}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$,

$$B_k(n, p) := \mathbb{P}\{X_{n,p} \leq k\}, \quad k < np,$$

žymi binominio atsitiktinio dydžio $X_{n,p}$ tikimybes nukrypti žemiau vidurkio. Uždavinys yra surasti tikimybių $B_k(n, p)$ viršutinių ir apatinių rėžių efektyviai skaičiuojamas analitines išraiškas:

$$G_k^-(n, p) \leq \mathbb{P}\{X_{n,p} \leq k\} \leq G_k^+(n, p). \quad (1)$$

Rėžius $G_k^-(n, p)$ ir $G_k^+(n, p)$ vadinsime *universaliais*, jeigu (1) galioja su visais $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ ir sveikais neneigiamais $k < np$. Juos vadinsime *asimptotiškai tiksliais*, jeigu visiems $q \in (0, p]$ ir $k = k_n < np$, $k_n/n \rightarrow q$, kai $n \rightarrow \infty$, galioja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_k^+(n, p)}{G_k^-(n, p)} = 1.$$

Šis uždavinys (vis dar) aktualus bent dėl dviejų priežasčių:

- (1) dideliems n tiesiogiai apskaičiuoti tikimybes $B_k(n, p)$ yra keblu, o joms aproksimuoti taikomi skirstiniai yra skirtingi, kai $p(1-p)n \rightarrow \infty$ (šiuo atveju skirstinys normalusis) ir kai $p(1-p)n \rightarrow \text{const}$ (šiuo atveju skirstinys Puasono);
- (2) yra žinoma, kad aprėžtų atsitiktinių dydžių sumos didžiųjų nuokrypių tikimybės gali būti gana tiksliai apribotos iš viršaus atitinkamomis (apibendrintųjų) binominių dydžių nuokrypių tikimybėmis [2, 1].

Šiame tyrime naudojant straipsnio [4] metodus patikslinamas straipsnio [3] rezultatas.

Literatūra

- [1] Bentkus, V. 2004. On Hoeffding's inequalities. *Ann. Probab.* 32(2):1650–1673.
- [2] Hoeffding, W. 1963. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association* 58:13–30.
- [3] Zhui, H.; Li, Z., Hayashi, M. 2022. Nearly tight universal bounds for the binomial tail probabilities. *arXiv:2211.01688v1*
- [4] Zubkov, A. M., Serov, A. A. 2012. A complete proof of universal inequalities for distribution function of binomial law. *Probability Theory and its Applications* 57:597–602.

Laisvų darbo vietų vertinimas mažose populiacijos srityse naudojant iš interneto nuskaitytus duomenis

Donatas Šlevinskas^{†,‡}, Andrius Čiginas^{†,‡}, Ieva Burakauskaitė^{†,‡}

[†] Valstybės duomenų agentūra

[‡] Vilniaus universitetas

Ketvirtinių laisvų darbo vietų rodiklių vertinimas remiasi tikimybine įmonių imtimi. Deja, naudojantis standartiniais vertinimo metodais, tokia imtis yra per maža, norint pakankamai tiksliai įvertinti parametrus mažose populiacijos srityse, pavyzdžiui, savivaldybėse. Kas savaitę iš interneto nuskaityti darbo skelbimų duomenys gali būti naudojami siekiant padidinti vertinimo tikslumą mažose srityse. Pasiūlome, kaip tokios netikimybinės, tik dalį populiacijos padengiančios imtys, gali būti naudojamos kaip papildoma informacija vertinimo mažose srityse modeliuose.

Redagavimo metodų lyginamoji analizė

Klaudija Švambarytė[†], Ieva Burakauskaitė^{†,‡}, Rūta Levulienė[†]

[†] Vilniaus universitetas

[‡] Valstybės duomenų agentūra

Vienas iš svarbių duomenų paruošimo etapų, užtikrinančių duomenų kokybę ir patikimų rezultatų gavimą, yra redagavimas, apimantis išskirčių radimą ir jų taisymą naudojant reikšmių įrašymo metodus. Buvo atlikta klasikinių statistinių ir mašininio mokymosi redagavimo metodų lyginamoji analizė, pateiktos praktinės rekomendacijos. Analizuoti Valstybės duomenų agentūros atliekamo Paslaugų įmonių veiklos statistinio tyrimo duomenys.

Vartotojų pasitikėjimo rodiklio prognozavimas naudojant X, Google Trends ir administracinius duomenis

Akvilė Vitkauskaitė^{†,‡}, Andrius Čiginas^{†,‡}

[†] Valstybės duomenų agentūra

[‡] Vilniaus universitetas

Šio tyrimo pagrindinis tikslas — prognozuoti vartotojų pasitikėjimo rodiklį (VPR). Siekiama įvertinti einamojo mėnesio VPR reikšmes greičiau nei tai daroma naudojant tradicinius apklausų metodus, kurie paprastai rezultatus pateikia mėnesio pabaigoje. Pavyzdžiui, nors oficialus lapkričio mėnesio VPR paprastai yra skelbiamas lapkričio mėnesio paskutinėmis dienomis, šis tyrimas siekia pateikti ankstyvą įvertį jau lapkričio pradžioje, naudojant duomenis, surinktus mėnesio pirmomis dienomis. Tai pasiekama derinant pagrindinius ekonominius rodiklius su istorinėmis VPR reikšmėmis. Tyrimas apima ir sąryšių tarp tradicinių, apklausomis grindžiamų rodiklių bei vartotojų nuomonės, išreikštos socialiniuose tinkluose, analizę. Vartotojų sentimentai yra gaunami iš socialinio tinklo X (Twitter) naudojant oficialių API. X žinučių sentimentų analizė leidžia mums sukurti socialinės medijos indikatorių (SMI), kuris yra naudingas prognozavimo modeliams, nes padidina prognozės tikslumą, atspindėdamas socialiniuose tinkluose vyraujančias nuotaikas. Prognozės tikslumui pagerinti įtraukiame Google Trends duomenis, kurie suteikia papildomų įžvalgų apie vartotojų paieškos elgseną ir susijusias ekonominio pasitikėjimo tendencijas. Šiame darbe iš administracinių duomenų bandome integruoti pagrindinius ekonominius rodiklius: infliacijos lygį, pajamų statistiką ir nedarbo apimtį. Verta paminėti, kad gauti duomenis iš populiarių socialinių platformų, tokių kaip Facebook ir Instagram, neįmanoma dėl griežtos privatumo politikos ir duomenų apsaugos reglamentų. Tuo tarpu, duomenys iš X yra lengvai ir legaliai prieinami, tačiau Lietuvoje ši platforma nėra tokia populiari. Todėl kyla tam tikrų X duomenų reprezentatyvumo problemų. Taigi, šis tyrimas siekia pateikti VPR prognozes anksčiau nei rezultatai gaunami tradiciniais metodais, derinant tradicinius ekonominius rodiklius, pažangią sentimentų analizę X duomenims ir Google Trends duomenis.

Stochastiniai metodai ir modeliai

Dalinių tolydaus laiko Markovo grandinių konstravimo algoritmų empirinis tyrimas

Mindaugas Bražėnas, Eimutis Valakevičius

Kauno technologijos universitetas

Nagrinėjame tolydaus laiko su didele diskrečia būsenų aibe Markovo grandinių tikimybių, priklausančių nuo laiko, apytikslių apskaičiavimą. Būsenų tikimybės, priklausančios nuo laiko, apskaičiuojamos pagal formulę $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0)e^{Qt}$, čia $\mathbf{p}(t)$ – būsenų tikimybių vektorius laiko momentui t , Q – perėjimų tarp būsenų intensyvumų matrica. Problema – formulės taikymas esant dideliame būsenų skaičiui, kuris tampa dar didesnis, kai laiko intervalų (tarp būsenų pasikeitimų) skirstinys aproksimuojamas faziniais skirstiniais. Sprendimas – duotai pradinei būsenai sukonstruoti dalinę Markovo grandinę su didžiausiu priimtiniu būsenų skaičiumi. Iš būsenų, neįtrauktų į dalinę grandinę, sudaroma viena sugerianti būseną. Būsenų tikimybės dalinėje grandinėje aproksimuoja pilnos grandinės būsenų tikimybes. Šios aproksimacijos paklaida priklauso nuo laiko momento t , į dalinę grandinę įtrauktų būsenų parinkimo bei jų skaičiaus.

Kaip parinkti įtraukiamas būsenas, kad dalinės Markovo grandinės būsenų tikimybės kiek galima geriau aproksimuotų pilnos grandinės tikimybes? Būsenų tikimybių paklaidų sumą atitinka sugeriančiosios būsenos tikimybė. Tiriamoje dalinės grandinės, su kiek galima mažesne sugeriančiosios būsenos tikimybe generavimą įvairiais algoritmais. Visų galimų dalinių Markovo grandinių sugeneravimas nėra praktiškai pritaikomas [2] dėl be galo didelio variantų skaičiaus. Todėl dėmesį skiriame euristiniams algoritmams, kurie dalinę Markovo grandinę konstruoja pagal tam tikrą kriterijų įtraukdami po vieną papildomą būseną. Pažymėkime: \mathcal{P} – įtrauktų būsenų aibė, $\bar{\mathcal{P}}$ – aibė būsenų, į kurias galima patekti iš jau įtrauktos būsenos (per vieną perėjimą). Paprasčiausias ir greičiausias algoritmas (SRND) yra įtraukti būsenas ta tvarka, kuria jos sugeneruojamos iš modelio aprašo. Geriausias dalines grandines generuojantys algoritmai (EXP, DSC) įtraukia būseną iš aibės $\bar{\mathcal{P}}$ su didžiausia tikimybe. Kita algoritmų grupė (P, PT) įtraukia artimiausią būseną iš aibės \mathcal{P} .

Tyrimai atlikti modeliuojant automobilių dalinimosi sistemą [1]. Efektyviausiai dalines Markovo grandines generuoja P ir PT algoritmai.

Literatūra

- [1] Bražėnas, M., Valakevičius, E. 2023. Approximation of Non-Markovian Car Sharing Systems Models by Markovian One. In: *Intelligent Systems and Applications. IntelliSys 2022*, Lecture Notes in Networks and Systems vol 543. Cham:Springer.
- [2] Bražėnas, M., Valakevičius, E. 2024. Investigation of continuous time Markov chain approximate transient analysis via subgraph generation in the case of a car sharing system model. *Expert Systems with Applications* 237(B):121595

Normaliųjų atsitiktinių dydžių sandaugų skirstinio uodegos asimptotinis elgesys

Mantas Dirma, Remigijus Leipus, Jonas Šiaulys, Romualdas Zovė

Vilniaus universitetas

Tarkime, kad $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ yra $n \in \mathbb{N}$ nepriklausomų nulinio vidurkio atsitiktinių dydžių (a.d.s) rinkinys, kuriame ξ_k , $k = 1, \dots, n$ yra pasiskirstęs pagal normalųjį skirstinį su dispersija σ_k^2 . Pranešimo metu nagrinėsime tokių a.d.s sandaugas $\Pi_n := \prod_{k=1}^n \xi_k$ ir pristatysime [2] straipsnio rezultatus, nusakančius sandaugų Π_n skirstinio uodegos tikimybės $\mathbb{P}(\Pi_n > x)$ elgesį, kai $x \rightarrow \infty$. Pagal gautą asimptotinę išraišką su pirmuoju liekamuoju nariu egzistuoja konstantos $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, su kuriomis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Pi_n > x) &\geq \left(1 - \frac{C_1}{\sqrt[n]{x^2}}\right) \frac{2^{(n/2)-1}(\sigma^{(n)})^{1/n}}{\sqrt{\pi n}} x^{-1/n} \exp\left\{-\frac{n(\sigma^{(n)})^{-2/n}}{2}\right\}, \\ \mathbb{P}(\Pi_n > x) &\leq \left(1 + \frac{C_1}{\sqrt[n]{x^2}}\right) \frac{2^{(n/2)-1}(\sigma^{(n)})^{1/n}}{\sqrt{\pi n}} x^{-1/n} \exp\left\{-\frac{n(\sigma^{(n)})^{-2/n}}{2}\right\},\end{aligned}$$

visiems $x > C_2$. Čia $\sigma^{(n)} := \prod_{k=1}^n \sigma_k$, o konstantos C_1 , C_2 priklauso tik nuo n ir $\sigma^{(n)}$. Gauti rezultatai patikslina asimptotines išraiškas išplaukiančias iš [1] ir yra iliustruojami pavyzdžiais, kuriuose *Monte-Carlo* simuliacijų metodu įvertintos normaliųjų a.d.s sandaugos uodegos tikimybės reikšmės aproksimuojamos teorinėmis asimptotinėmis formulėmis.

Literatūra

- [1] Arendarczyk, M., Debicki, K. 2011. Asymptotics of supremum distribution of a Gaussian process over a Weibullian time. *Bernoulli* 17:194–210.
- [2] Leipus, R., Šiaulys, J., Dirma, M. et al. 2023. On the distribution-tail behaviour of the product of normal random variables. *J. Inequal. Appl.* 2023:32.

Netolygus įvertis Hipp'o teoremoje dvimačiu atveju

Simona Jokubauskienė[†], Vydas Čekanavičius[‡]

[†] Vytauto Didžiojo universitetas

[‡] Vilniaus universitetas

Tarkime, $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2})$, $(i = 1, \dots, n)$ yra nepriklausomi dvimačiai atsitiktiniai vektoriai, įgyjantys reikšmes aibėje \mathbb{Z}^2 ir turintys pasiskirstymo funkcijas F_1, \dots, F_n . Tegul $S_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$. Pažymėkime

$$H_{i,s} = \exp \left\{ \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} (F_i - I)^{*j} / j \right\}, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Kai $s = 1$, gausime standartinę sudėtinio Puasono aproksimaciją. Pažymėkime

$$\mathbf{F} = \mathcal{L}(S_n) = \prod_{i=1}^{*n} F_i, \quad \mathbf{H}_{n,s} = \prod_{i=1}^{*n} H_{i,s}.$$

Mūsų tikslas – $\mathcal{L}(S_n)$ aproksimuoti sudėtinių Puasono matų sąsūka.

Tegul $p_i(k, m) = F_i\{k, m\} = \mathbb{P}(X_{i1} = k, X_{i2} = m)$, $(i = 1, \dots, n)$, ir tarkime, jog egzistuoja absoliučios konstantos C_0 ir C_1 tokios, kad visiems $i = 1, \dots, n$

$$q_i = p_i(0, 0) \geq C_0, \quad |X_{i1}|, |X_{i2}| \leq C_1. \quad (1)$$

Taigi gali būti pritaikytas vienmatis įvertis, įrodytas Hipp'o [1].

Pažymėkime $\nu_i(1, 0) = \sum_{k,m=0}^{\infty} k p_i(k, m)$, $\nu_i(0, 1) = \sum_{k,m=0}^{\infty} m p_i(k, m)$,

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \sum_{i=1}^n \nu_i(1, 0), \quad \boldsymbol{\mu}_2 = \sum_{i=1}^n \nu_i(0, 1),$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \sum_{i=1}^n p_i(1, 0), \quad \boldsymbol{\lambda}_2 = \sum_{i=1}^n p_i(0, 1),$$

$$\varepsilon_0(s) = \sum_{i=1}^n \nu_i^s(1, 0) \min(1, \boldsymbol{\lambda}_1^{-s/2}) + \sum_{i=1}^n \nu_i^s(0, 1) \min(1, \boldsymbol{\lambda}_2^{-s/2}).$$

Pranešime pristatysime gautą teoremą, kurioje netolygūs įverčiai duoda lokalių įverčių pagerinimą.

Teorema. *Sakykime, galioja sąlygos (1), kai $C_0 > 2/3$, $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$. Tuomet bet kokiam $(k, m) \in \mathbb{N}^2$*

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{|k - \boldsymbol{\mu}_1|}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1}} + \frac{|m - \boldsymbol{\mu}_2|}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_2}} \right) |F^{*n}\{k, m\} - \mathbf{H}_{n,2}\{k, m\}| \\ & \leq C(s) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{\boldsymbol{\lambda}_1} + \frac{\boldsymbol{\mu}_2}{\boldsymbol{\lambda}_2} \right) \frac{\varepsilon_0(s+1)}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1 \boldsymbol{\lambda}_2}}. \end{aligned}$$

Literatūra

- [1] Hipp, C. 1986. Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. *ASTIN Bull.* 16(2):89–100.

Tolydaus laiko diskrečiųjų martingalų statistinių modelių asimptotinis įvertinimas

Vaidotas Kanišauskas, Karolina Kanišauskienė

Vilniaus universitetas

Darbe nagrinėjami tolydaus laiko diskrečiųjų lokaliųjų martingalų statistiniai eksperimentai, apimantys visų tipų taškinių procesų modelius. Diskrečiųjų lokaliųjų martingalų lokalaus tankio procesas išreiškiamas stochastinio integralo pagal kompensuotą taškinį matą stochastine eksponente. Nustatomos patogios tikrinimui bendrosios sąlygos, užtikrinančios maksimalaus tikėtinumo ir Bajeso įverčių tolygų pagrįstumą, tolygų asimptotinį normalumą ir asimptotinį minimaksiškumą kiekviename parametrinės aibės kompakte. Darbe taikomas optimalus atsitiktinių ir parametrinių funkcijų Frešė diferencijuojamumas pagal tikimybę normuotose erdvėse tolydaus kompensatoriaus atžvilgiu. Parodoma, kaip pagrindinės sąlygos kardinaliai supaprastėja atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi atveju.

Skellamo aproksimacija markoviškai priklausomiems dydžiams

Gabija Liaudanskaitė, Vydas Čekanavičius

Vilniaus universitetas

Tritaškių simetrinių markoviškai priklausomų atsitiktinių dydžių suma aproksimuojama dviejų nepriklausomų Puasono atsitiktinių dydžių skirtumu (Skellam atsitiktiniu dydžiu) pilnosios variacijos, lokaliuoje ir L_1 metrikose. Esant gana bendroms sąlygoms (pvz., atsitiktinių dydžių sekoms) aproksimacijos tikslumas yra $O(1/n)$ pilnai variacijai.

Literatūra

- [1] Presman, E. L. 1984. Approximation of Binomial distributions by infinitely divisible ones. *Teor. Veroyatn. Primen.* 28(2):372–382 (rusiškai); *English transl.: Theory Probab. Appl.* 28(2):393–403.
- [2] Roos, B. 2003. Improvements in the Poisson approximation of mixed Poisson distributions. *J. Statist. Plann. Inference* 113:467–483.
- [3] Skellam, J. G. 1946. The frequency distribution of the difference between two Poisson variates belonging to different populations. *J. R. Statist. Soc. (N.S.)* 109:296.
- [4] Šliogerė, J., Čekanavičius, V. 2016. Approximation of symmetric three-state Markov chain by compound Poisson law. *Lith. Math. J.* 56(3):417–438.

Konkordacijos matų konstrukcija naudojant generatorius

Martynas Manstavičius

Vilniaus universitetas

Pranešime bus kalbama apie naujus populiaraus statistinės priklausomybės mato, Kendall'o τ , tolydžių atsitiktinių dydžių poroms apibendrinimus, kurie gaunami naudojant C. Borroni [1] apibrėžtus generatorius. Bus pristatomos tokių generacijų konstrukcijos ir pavyzdžiai.

Literatūra

- [1] Borroni, C. G. 2019. Mutual association measure, *Stat. Methods Appl.* 28(4):571–591.

Supermartingale Brenier's Theorem with Full-Marginals Constraint

Dominykas Norgilas[†], Erhan Bayraktar[‡], Shuoqing Deng[‡]

[†] North Carolina State University (USA)

[‡] University of Michigan (USA)

[‡] Hong Kong University of Science and Technology (Hong Kong)

We explicitly construct the supermartingale version of the Fréchet-Hoeffding coupling in the setting with infinitely many marginal constraints. This extends the results of Henry-Labordere et al. [3] obtained in the martingale setting. Our construction is based on the Markovian iteration of one-period optimal supermartingale couplings. In the limit, as the number of iterations goes to infinity, we obtain a pure jump process that belongs to a family of local Lévy models introduced by Carr et al. [2]. We show that the constructed processes solve the continuous-time supermartingale optimal transport problem for a particular family of path-dependent cost functions. The explicit computations are provided in the following three cases: the uniform case, the Bachelier model and the Geometric Brownian Motion case.

References

- [1] Bayraktar, E., Deng, S., Norgilas, D. 2023. Supermartingale Brenier's Theorem with full-marginals constraint. *Frontiers of Mathematical Finance* 2(2):202–243.
- [2] Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., Yor, M. 2004. From local volatility to local Lévy models. *Quantitative Finance* 4:581–588.
- [3] Henry-Labordère, P., Tan, X., Touzi, N. 2016. An explicit martingale version of the one-dimensional Brenier's Theorem with full marginals constraint *Stochastic Processes and their Applications* 126(9):2800–2834.

Sunkiauodegių skirstinių uždaramas

Jonas Šiaulys, Remigijus Leipus

Vilniaus universitetas

Atsitiktinis dydis X kartu su jo pasiskirstymo funkcija $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ vadinamas sunkiauodegiais, jeigu

$$\mathbb{E} e^{\lambda X} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF_X(x) = \infty$$

bet kuriam $\lambda > 0$. Priešingu atveju atsitiktinis dydis X kartu su savo pasiskirstymo funkcija F_X vadinami lengvauodegiais.

Sakykime $\{X_1, X_2, \dots\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių seka, o ν yra sveikareikšmis atsitiktinis dydis, nepriklausantis nuo sekos $\{X_1, X_2, \dots\}$. Tokiems atsitiktiniams dydžiams galima nagrinėti:

- *atsitiktinai sustabdytą sumą* $S_\nu = X_1 + \dots + X_\nu$,
- *atsitiktinai sustabdytą maksimumą* $X^{(\nu)} = \max\{0, X_1, \dots, X_\nu\}$,
- *atsitiktinai sustabdytą minimumą* $X_{(\nu)} = \min\{X_1, \dots, X_\nu\} \mathbb{I}_{\{\nu \geq 1\}}$,
- *atsitiktinai sustabdytą sumų maksimumą* $S^{(\nu)} = \max\{0, S_1, \dots, S_\nu\}$,
- *atsitiktinai sustabdytą sumų minimumą* $S_{(\nu)} = \min\{S_1, \dots, S_\nu\} \mathbb{I}_{\{\nu \geq 1\}}$.

Pranešimo metu bus aptartos sąlygos, kurioms esant atsitiktiniai dydžiai $S_\nu, X^{(\nu)}, X_{(\nu)}, S^{(\nu)}$ ar $S_{(\nu)}$ yra sunkiauodegiai. Gauti rezultatai rodo, kad tokie skirstiniai gali būti sunkiauodegiais ir tuo atveju, kai pagrindiniai atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, \dots yra nevienodai pasiskirstę arba lengvi. Pavyzdžiui, yra teisingas toks tvirtinimas.

Pasiskirstymo funkcija F_{S_ν} yra sunkiauodegė, jeigu $\inf_{k \geq 1} \mathbb{E} e^{\lambda X_k} > 1$ ir pasiskirstymo funkcija F_ν yra sunkiauodegė.

Visi rezultatai, kurie bus aptarti pranešimo metu, yra sudėti į straipsnį [1].

Literatūra

- [1] Leipus, R., Šiaulys, J., Danilenko, S., Karasevičienė, J. Randomly stopped sums, minima and maxima for heavy-tailed and light-tailed distributions. (Pateiktas spaudai).

Tankių grafų atsitiktiniai procesai

Matas Šileikis[†], Frederik Garbe[‡], Jan Hladký[†], Fiona Skerman[‡]

[†] Čekijos Mokslų Akademijos Informatikos Institutas (Čekija)

[‡] Masaryk universitetas, Brno (Čekija)

[‡] Upsalos universitetas (Švedija)

Nagrinėjame klasę diskretaus laiko procesų, kurių reikšmės yra „dideli“ grafai, o naujas grafas gaunamas modifikuojant „mažą“ atsitiktinai pasirinktą po-
grafą. Įrodome, kad proceso trajektorija konverguoja į deterministinę trajektoriją tam tikroje funkcijų (grafonų) erdvėje. Šias ribines trajektorijas aprašome kaip dinaminę sistemą grafonų erdvėje. Tokios dinaminių sistemų savokos kaip fiksuotieji taškai ir periodinės orbitos leidžia atrasti įdomias grafų procesų sa-
vybes, kurias būtų sunku atskleisti diskrečiais metodais.

Teorinë informatika

Apie STR raktų apsikeitimo protokolo saugumą

Aleksejus Michalkovič

Kauno technologijos universitetas

Pranešime yra nagrinėjamas STR (Sakalauskas, TvariJonas, Raulynaitis) raktų apsikeitimo protokolo (RAP) kriptografinis saugumas. Pirminiai rezultatai rodo, kad STR RAP turi saugumo spragų, jei protokolui realizuoti yra naudojamas baigtinis laukas \mathbb{Z}_p , čia p yra didelis nelyginis pirminis skaičius.

Literatūra

- [1] Myasnikov, A. D., Ushakov, A. 2014. Quantum Algorithm for the Discrete Logarithm Problem for Matrices over Finite Group Rings. *Groups Complexity Cryptology* 6(1):31–36.
- [2] Sakalauskas, E., TvariJonas, P., Raulynaitis, A. 2007. Key Agreement Protocol (KAP) Using Conjugacy and Discrete Logarithm Problems in Group Representation Level. *Informatica* 18:115–124.

Wave-U-Net modelio pritaikymas šnekos signalų gerinimui triukšmingoje aplinkoje: blokų skaičiaus optimizavimo tyrimas ir jų įtaka šnekos signalo kokybei bei suprantamumui

Justina Ramonaitė, Gražina Korvel

Vilniaus universitetas

Pagrindinis žmonių naudojamas būdas informacijos keitimuisi yra šneka. Vienas jos trūkumas yra jautrumas aplinkos triukšmui, kuris yra nepastovus, priklauso nuo aplinkos sąlygų ir veiksnių, tokių kaip automobilių eismas, buitinių prietaisų ūžesys, gamtos reiškinių garsai arba šalia esančių žmonių kalbėjimas. Be to, kiekvienas aplinkos triukšmas pasižymi skirtingu triukšmo lygiu. Tai ne tik trukdo efektyviam bendravimui, bet ir apsunkina skaitmeninį šnekos signalo apdorojimo procesą, nes triukšmas užmaskuoja arba iškraipo šnekos signalą. Norint spręsti šią problemą, naudojami įvairūs algoritmai šnekos signalui gerinti. Pastaruoju metu gilus mokymosi metodai įgavo populiarumą šnekos gerinimo srityje. Tokie algoritmai gali automatiškai išmokti atpažinti ir pašalinti triukšmą iš kalbos signalo, didindami kalbos kokybę ir suprantamumą net labai triukšmingoje aplinkoje. Šiame darbe kalbos signalo gerinimui naudojamas Wave-U-Net gilus mokymosi modelis, tiriamas kiekvieno jo bloko įnašas į modelio gebėjimą atskirti šnekos signalą nuo triukšmo signalo bei įvertinama, kaip šis įnašas paveikia bendrą šnekos signalo gerinimo veiksmingumą. Tyrimo tikslas - nustatyti optimalų blokų skaičių, kuris maksimaliai padidintų modelio našumą triukšmingose aplinkose, užtikrinant geriausią kalbos signalo kokybę ir suprantamumą.

Turinio atpažinimas suskaitmenintuose finansiniuose dokumentuose

Simas Rimašauskas, Igoris Belovas, Rolandas Gričius

Vilniaus universitetas

Turinio atpažinimo skaitmeniniuose dokumentuose būtinybė skaitmenizacijos tendencijos dėka finansinių paslaugų sektoriuje nuolat didėja. Didžiausiose ir likvidžiausiose rinkose yra daugybė lengvai prieinamų šaltinių duomenims gauti. Tačiau taip nebūna mažose nelikvidžiose obligacijų ir akcijų rinkose, kurios investuotojus domina mažiau ir kurios priskiriamos besivystančioms. Daugeliu tokių atvejų vieninteliai šaltiniai yra pirminiai, tai yra pačios įmonės ataskaitos, o negausūs antriniai šaltiniai dažnai pateikia nepatikimus duomenis. Dėl išvardintų priežasčių Lietuvos bendrovės susiduria su patikimų šaltinių radimo ir duomenų išgavimo problemomis. „SB Asset Management“, investuojanti į besivystančių rinkų skolos vertybinius popierius, sprendžia problemas, kylančias siekiant įvertinti šiuose regionuose veikiančių įmonių finansinę padėtį.

Optinio simbolių atpažinimo (OCR) technologija leidžia greitai ir automatiškai atpažinti finansinių dokumentų turinį. Darbe siekiama apžvelgti šiuolaikinius OCR įrankius bei lentelių atpažinimo modelius ir išbandyti juos su pasirinktomis finansinėmis ataskaitomis. Taip pat siekiame apibūdinti jų pranašumus ir trūkumus, palyginti efektyvumą išgaunant informaciją. Duomenų atpažinimui buvo pasirinkti Google Cloud Vision ir Tesseract OCR varikliai, o lentelės struktūros atpažinimui – Table Transformer (TATR) ir TableNET. Be to, buvo testuojamas ir ABBYY FineReader, kuris atlieka abi užduotis.

Conway žaidimo „Gyvenimas“ perturbavimas

Raimundas Vidunas, Arnas Vaicekaskas

Vilniaus universitetas

John'o Conway žaidimas „Gyvenimas“ yra žymiausias ląstelinis automatas. Jo paprastos taisyklės sukuria sudėtingą „gyvų“ ląstelių konfigūracijų raidą stačiakampėje gardelėje. Panagrinėsime perturbuotą „Gyvenimo“ variantą, kur galimos klaidos su maža tikimybe. Tarsime, kad klaidos tikimybė tokia maža, kad ji minimaliai paveikia tik nusistovėjusias (stabilias, ciklines, reguliariai judančias ar augančias) konfigūracijas. Gauname Markovo procesą tarp nusistovėjusių konfigūracijų. Toks stochastinis modelis galimai yra dar įdomesnis sudėtingumo išryškėjimo kintamoje realybėje modelis. Kad pasiektume suskaičiuojamų rezultatų, apsiribosime žaidimu „Gyvenimas“ ant mažų (iki 11×11 dydžio) toroidų.

Raktų apsiskeitimo protokolo, paremto matricinio laipsnio funkcija, statistinė analizė

Jokūbas Žitkevičius, Aleksejus Michalkovič

Kauno technologijos universitetas

Raktų apsiskeitimo protokole (RAP) dalyvauja Aldona ir Bronius, kurie nutarę dėl viešų parametrų, naudodami savo privačiuosius raktus, sukuria bendrąjį raktą K_0 . Bendrojo rakto K_0 saugumas yra paremtas elementų pasiskirstymu – uniformiškas pasiskirstymas minimizuoja dalinės informacijos atskleidimą apie privačių raktų PrK_A ir PrK_B generavimą. Privatūs raktai PrK_A , PrK_B turi tenkinti šablonus dėl nagrinėjamos algebrinės struktūros nekomutatyvumo. Taip pat imitacinį raktą K_1 generuoja piktavališkas, kuris bando įžvelgti pasiskirstymų tendencijas tarp K_0 bei K_1 . Įrodę pasiskirstymų vienodumą, sumažintume sėkmingos RAP atakos tikimybę. Darbe atliktais statistiniais tyrimais yra parodyta, kad K_0 , K_1 pasiskirstymai yra vienodi.

Literatūra

- [1] Michalkovič, A., Lukšys, K., Sakalauskas, E. 2022. Sigma identification protocol construction based on MPF defined over non-commuting platform group. *Mathematics* 10(15):2649.
- [2] Michalkovič, A., Sakalauskas, E., Levinskas, M. 2002. *Key Exchange Protocol Based on the Matrix Power Function Defined Over*. Springer.

Rodyklė

- Alonderis R., 12
Astrauskas R., 42, 55
- Balčiūnas A., 29
Bayraktar E., 85
Belovas I., 13, 14, 44, 91
Bingelė K., 36
Birštunas A., 28
Bloznelis M., 56
Bražėnas M., 79
Burakauskaitė I., 75, 76
- Deng S., 85
Dirma M., 80
Dubickas A., 8, 24
Dukynaitė R., 68
Dučinskas K., 66
- Everatt S. M., 37
- Garbaliauskas A., 15
Garbaliauskienė V., 15
Garbe F., 87
Garunkštis R., 16
Gervytė M., 67
Geštautas A., 17
Gricius R., 91
Grigaliūnienė M., 45
Grigutis A., 18
Gutauskienė B., 19
- Hladký J., 87
Hoxhaj E., 26
- Ivanauskas F., 42, 55
- Jakaitienė A., 68
Jasas M., 20
Jokubauskienė S., 81
Junevičius G., 21
Juodagalvytė R., 38
- Kalibatienė D., 61
Kanišauskas V., 82
Kanišauskienė K., 46, 82
Kanonovičius A., 55
Karaliūtė M., 66
Kareiva A., 42
Kasparavičiūtė A., 61
Kaulakytė K., 37–40
Kačinskaitė R., 22, 34
Kilienė I., 47
Kleiza V., 57
Klimantavičiūtė G., 69
Korvel G., 90
Kozulinas N., 39, 40
Krasauskas R., 26
Krilavičius T., 63
Kudžma R. J., 48
- Landauskas M., 58
Leipus R., 80, 86
Leonaitė R., 58
Levickytė J., 70
Levulienė R., 70, 76
Liaudanskaitė G., 83
- Macaitienė R., 19, 23
Maciulevičius L., 24
Mandravickaitė J., 63
Manstavičius E., 25
Manstavičius M., 84
Markevičiūtė J., 69
Marma D., 56
Mazėtis E., 50
Mačys J. J., 49
Melničenko G., 50
Menjanahary, J. M., 26
Michalkovič A., 89, 93
Miežys V., 51
Miklauskaitė T., 27

Nekrašaitė-Liegė V., 71
Norgilas D., 85
Norvaiša R., 52, 53

Orinaitė U., 59

Pakalniškis A., 42
Panasenka G., 40
Paukštaitienė R., 72
Pileckas K., 9, 38–40
Pupalaiгіė K., 41

Radavičius M., 55, 74
Ragauskas K., 28
Ragulskis M., 59, 60
Ramonaitė J., 90
Rimašauskas S., 91
Rimkevičienė A., 29
Ringienė L., 68

Sabaliauskas M., 14
Sapagovas M., 41
Saunorienė L., 60
Simanavičienė R., 61
Skerman F., 87
Songailaitė M., 63
Stoncelis M., 30

Tekorė M., 33
Telksnienė I., 59
Telksnys T., 59, 64
Tilindis J., 57
Togobickij B., 34
Treigys P., 10

Vaicekauskas A., 92
Valakevičius E., 79
Van Hoof J., 45
Vidunas R., 92
Vitkauskaitė A., 77

Zovė R., 80

Čekanavičius V., 81, 83
Čepaitytė R., 14
Čiginas A., 75, 77

Šiaulys J., 80, 86
Šiaučiūnas D., 31
Šileikis M., 87
Šimėnas R., 32

Šlevinskas D., 75
Špečkauskienė V., 72
Štikonas A., 36
Šumskas V., 40, 42
Švambarytė K., 76
Želvys R., 68
Žitkevičius J., 93
Žvirblis T., 67

Vilniaus universiteto leidykla
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
info@leidykla.vu, www.leidykla.vu.lt
Knygos internete *www.knygynas.vu.lt*
Mokslo periodikos žurnalai *www.zurnalai.vu.lt*